目　　录

第一章 生成和表示

§1.1 有界线性算子一致连续半群

定义 1.1 设X是 Banach 空间，$T(t)(0\leqslant t<\infty)$是映$X$到$X$内的有界线性算子的单参数族。称 $T(t)(0\leqslant t<\infty)$是$X$上的有界线性算子半群，如果

(i) $T(0)=I$ （I 是 X 上的恒等算子）。

(ii) $T(t+s)=T(t)T(s)$ 对一切 t, $s\geqslant 0$ 成立（半群性质）。

一个有界线性算子半群$T(t)$称为一致连续的，如果

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T(t)-I\|=0. \tag{1.1}$$

定义线性算子A如下：命

$$D(A)=\left\{x\in X:\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}\text{存在}\right\} \tag{1.2}$$

和对于 $x\in D(A)$,

$$Ax=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}=\frac{d^+T(t)x}{dt}\bigg|_{t=0}. \tag{1.3}$$

称A是半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，$D(A)$ 是A 的定义域。

本节将集中研究有界线性算子的一致连续半群。显然，

由其定义，当 $T(t)$ 是有界线性算子的一致连续半群时，成立

$$\lim_{s\to t}\|T(s)-T(t)\|=0. \tag{1.4}$$

定理 1.2 线性算子A 是一致连续半群的无穷小生成元当且仅当A是有界线性算子。

证明 设A 是X 上有界线性算子。又设

$$T(t)=e^{tA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}. \tag{1.5}$$

(1.5)的右端对每一 $t\geqslant 0$ 依范数收敛且定义了一个有界线性算子 $T(t)$。显然 $T(0)=I$ 且通过对幂级数的直接计算指出 $T(t+s)=T(t)T(s)$ 成立。又对幂级数作估计，我们得到

$$\|T(t)-I\|\leqslant t\|A\|e^{t\|A\|}$$

和

$$\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\|\leqslant\|A\|\cdot\|T(t)-I\|,$$

由此推出 $T(t)$是 X 上有界线性算子的一致连续半群且 A 是无穷小生成元。

设 $T(t)$ 是 X 上有界线性算子的一致连续半群。固定 $\rho>0$ 充分小，使得 $\left\|I-\rho^{-1}\int_0^{\rho}T(s)ds\right\|<1$。由此推出 $\rho^{-1}\int_0^{\rho}T(s)ds$ 是可逆的，因此 $\int_0^{\rho}T(s)ds$ 是可逆的。现在

$$h^{-1}(T(h)-I)\int_0^\rho T(s)ds = h^{-1}\left(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds\right)$$

$$= h^{-1}\left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\right),$$

所以

$$h^{-1}(T(h)-I) = \left(h^{-1}\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - h^{-1}\int_0^h T(s)ds\right)$$

$$\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}. \tag{1.6}$$

在(1.6)中让 $h\downarrow 0$ 得 $h^{-1}(T(h)-I)$ 依范数，因而强收敛到有界线性算子 $(T(\rho)-I)\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$，且 $(T(\rho)-I)$ $\left(\int_0^\rho T(s)ds\right)^{-1}$ 是$T(t)$的无穷小生成元。

显然，由定义1.1，半群 $T(t)$有唯一的无穷小生成元。如果 $T(t)$ 是一致连续算子，那么它的无穷小生成元是一个有界线性算子。另一方面，每个有界线性算子A 是一个一致连续半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。这个半群唯一吗？以下定理肯定地回答了这个问题。

定理 1.3 设 $T(t)$ 和 $S(t)$是有界线性算子的一致连续半群。如果

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)-I}{t}, \tag{1.7}$$

则 $T(t)=S(t)$ 对 $t\geqslant 0$ 成立。

证明 我们将指出对给定的 $T>0$，$S(t)=T(t)$ 对于

$0 \leqslant t \leqslant T$ 成立。设 $T>0$ 固定。因为 $t \to \|T(t)\|$，$t \to \|S(t)\|$ 连续，存在常数C使得$\|T(t)\| \cdot \|S(t)\| \leqslant C$ 对于 $0 \leqslant s$，$t \leqslant T$ 成立。给定 $\varepsilon>0$，由(1.7)存在 $\delta>0$，使得

$$h^{-1}\|T(h)-S(h)\|<\varepsilon/TC \quad \text{对于 } 0 \leqslant h \leqslant \delta \text{成立。} \tag{1.8}$$

设 $0 \leqslant t \leqslant T$，并且取 $n \geqslant 1$ 使得 $t/n<\delta$。由半群性质及(1.8)得

$$\begin{aligned}
\|T(t)-S(t)\| &= \left\| T\left(n\frac{t}{n}\right)-S\left(n\frac{t}{n}\right)\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left\| T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right\| \cdot \left\| T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \cdot \left\|S\left(\frac{kt}{n}\right)\right\| \\
&\leqslant Cn\frac{\varepsilon}{TC} \cdot \frac{t}{n} \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $T(t)=S(t)$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant T$ 成立。定理证毕。

推论 1.4 设$T(t)$是有界线性算子的一致连续半群，则

(*a*) 存在常数 $\omega \geqslant 0$使得$\|T(t)\| \leqslant e^{\omega t}$，

(*b*) 存在唯一的有界线性算子A 使得 $T(t)=e^{tA}$。

(*c*) (*b*)中的算子A 是 $T(t)$ 的无穷小生成元。

(d) $t\to T(t)$依范数可微，且

$$\frac{dT(t)}{dt}=AT(t)=T(t)A, \tag{1.9}$$

证明 推论1.4的所有结论容易由(b)推出。为了证明(b)，注意$T(t)$的无穷小生成元是一个有界线性算子A。A亦是由(1.5)定义的e^{tA}的无穷小生成元。因此由定理1.3知$T(t)=e^{tA}$。

§1.2 有界线性算子强连续半群

本节设X是Banach空间。

定义 2.1 一个X上的有界线性算子半群$T(t)$，$0\leqslant t<\infty$称为有界线性算子强连续半群，如果

$$\lim_{t\to 0} T(t)x=x, \text{ 对一切 } x\in X\text{成立。} \tag{2.1}$$

一个X上的有界线性算子强连续半群将称为一个C_0类半群，或简称为一个C_0半群。

定理 2.2 设$T(t)$是一个C_0半群，则存在常数$\omega\geqslant 0$和$M\geqslant 1$，使得

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t} \quad \text{对于 } 0\leqslant t<\infty \text{ 成立} \tag{2.2}$$

证明 我们首先证明存在$\eta>0$，使得$\|T(t)\|$当$0\leqslant t\leqslant\eta$时有界。若不然，则存在序列$\{t_n\}$满足$t_n\geqslant 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$和$\|T(t_n)\|\geqslant n$。于是由一致有界性定理，$\|T(t_n)x\|$对某$x\in X$是无界的，这与(2.1)矛盾。因此当$0\leqslant t\leqslant\eta$时，$\|T(t)\|\leqslant M$。

因为$\|T(0)\|=1$，知 $M\geqslant 1$。命 $\omega=\eta^{-1}\log M\geqslant 0$。给定 $t\geqslant 0$，我们有 $t=n\eta+\delta$，因而由半群性质

$$\|T(t)\|=\|T(\delta)T(\eta)^n\|\leqslant M^{n+1}\leqslant MM^{t/\eta}=Me^{\omega t}.$$

推论 2.3 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，则对每一 $x\in X$，$t\to T(t)x$ 是一个从 R_0^+(非负实轴)到X 的连续函数。

证明 设t，$h\geqslant 0$。由下式推出 $t\to T(t)x$ 的连续性：

$$\begin{aligned}\|T(t+h)x-T(t)x\|&\leqslant\|T(t)\|\cdot\|T(h)x-x\|\\&\leqslant Me^{\omega t}\|T(h)x-x\|,\end{aligned}$$

且当 $t\geqslant h\geqslant 0$ 时

$$\begin{aligned}\|T(t-h)x-T(t)x\|&\leqslant\|T(t-h)\|\cdot\|x-T(h)x\|\\&\leqslant Me^{\omega t}\|x-T(h)x\|.\end{aligned}$$

定理 2.4 设 $T(t)$是 C_0 半群，又设A是其无穷小生成元，则

(a) 对 $x\in X$ 成立

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)xds=T(t)x. \tag{2.3}$$

(b) 对 $x\in X$ 成立 $\int_0^t T(s)xds\in D(A)$和

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right)=T(t)x-x. \tag{2.4}$$

(c) 对 $x\in D(A)$，$T(t)x\in D(A)$和

$$\frac{d}{dt}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax. \tag{2.5}$$

(d) 对 $x\in D(A)$成立

$$T(t)x-T(s)x=\int_s^t T(\tau)\ Ax\,d\tau=\int_s^t AT(\tau)x d\tau. \tag{2.6}$$

证明： (a)由 $t\to T(t)x$ 的连续性直接推出。为了证明(b)。命 $x\in X$ 和 $h>0$，则

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds=\frac{1}{h}\int_0^h (T(s+h)x-T(s)x)ds$$

$$=\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds-\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds$$

且当 $h\downarrow 0$ 时右端趋于 $T(t)x-x$。这就证明了(b)。为了证明(c)。命$x\in D(A)$和 $h>0$，则

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x=T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x\to T(t)Ax,$$

$$\text{当 } h\downarrow 0 \text{ 时。} \tag{2.7}$$

因此$T(t)x\in D(A)$和$AT(t)x=T(t)Ax$。(2.7)亦推出

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax,$$

即 $T(t)x$ 的右导数是 $T(t)Ax$。为了证明(2.5)，我们必须指出当 $t>0$时，$T(t)x$ 的左导数存在且等于 $T(t)Ax$，这可由以下事实得出：

$$\lim_{h\downarrow 0}\left[\frac{T(t)x-T(t-h)x}{h}-T(t)Ax\right]$$

$$=\lim_{h\downarrow 0} T(t-h)\left[\frac{T(h)x-x}{h}-Ax\right]$$

$$+\lim_{h\downarrow 0}\ (T(t-h)Ax-T(t)Ax),$$

而右端两项是零：第一项因为 $x\in D(A)$ 和 $\|T(t-h)\|$在 $0\leqslant h\leqslant t$ 上有界，而第二项因为 $T(t)$的强连续性。这就完成了(c)的证明。(d)由(2.5)从 s 到 t 积分可得

推论 2.5 若 A 是 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，则 A 的定义域 $D(A)$在 X 中稠密，且 A 是一个闭线性算子。

证明 对每一 $x\in X$，命 $x_t=\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds$。由定理2.4(b)，对 $t>0$ 有 $x_t\in D(A)$，并且由定理 2.4(a)，当 $t\downarrow 0$ 时有 $x_t\to x$。因此 $D(A)$的闭包 $\overline{D(A)}$ 等于 X。A的线性性是显然的。为证明 A 的闭性，设 $x_n\in D(A)$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x$ 且$A\ x_n\to y$。由定理2.4(d)我们有

$$T(t)x_n-x_n=\int_0^t T(s)Ax_nds. \tag{2.8}$$

在(2.8)的右端，被积函数在有界区间上一致收敛到$T(s)y$。因此在(2.8)中让 $n\to\infty$ 得到

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)yds. \tag{2.9}$$

用 $t>0$ 除 (2.9) 且让 $t\downarrow 0$，由定理 2.4(a) 我们得到 $x\in D(A)$和 $Ax=y$。

定理 2.6 设 $T(t)$和 $S(t)$是有界线性算子的C_0 半群，其无穷小生成元分别是A 和B。如果 $A=B$，则 $T(t)=S(t)$ 对 $t\geqslant 0$ 成立。

证明 设 $x\in D(A)=D(B)$。从定理 2.4(c) 易知函数

$s \to T(t-s)S(s)x$ 是可微的，并且

$$\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x = -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x$$

$$= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.$$

因此 $s \to T(t-s)S(s)x$ 是常值，特别它在 $s=0$ 和 $s=t$ 的值是相等的。即 $T(t)x = S(s)x$。这对每一 $x \in D(A)$ 都成立。并且因为由推论2.5知 $D(A)$ 在 X 中稠密和 $T(t)$，$S(t)$ 是有界的，所以对每一 $x \in X$，$T(t)x = S(t)x$。

如果 A 是 C_0 半群的无穷小生成元，则由推论 2.5 知 $\overline{D(A)} = X$。实际上，我们有更强的结论成立。

定理 2.7 设 A 是 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 $D(A^n)$ 是 A^n 的定义域，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ 在 X 中稠密。

证明 命 D 是所有在 $(0, \infty)$ 中具有紧支集的无穷可微复值函数的集合。对 $x \in X$ 和 $\varphi \in D$ 命

$$y = x(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\,ds \tag{2.10}$$

如果 $h > 0$，则

$$\frac{T(h)-I}{h}y = \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)[T(s+h)x - T(s)x]ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{h}[\varphi(s-h) - \varphi(s)]T(s)x\,ds. \tag{2.11}$$

在(2.11)的右端，当 $h \downarrow 0$ 时，被积函数在 $[0, \infty)$ 上一致收

敛到 $-\varphi'(s)T(s)x$。因此 $y\in D(A)$且

$$Ay=\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)-I}{h}y=-\int_0^\infty \varphi'(s)T(s)xds.$$

显然，如果 $\varphi\in D$，那么 φ 的 n 阶导数 $\varphi^{(n)}$ 也在 D 中，$n=1, 2, \cdots$。因此重复前述推导我们有 $y\in D(A^n)$，

$$A^n y=(-1)^n\int_0^\infty \varphi^{(n)}(s)T(s)xds,\quad n=1, 2, \cdots,$$

因此 $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A^n)$。命 $Y=\{x(\varphi): x\in X, \varphi\in D\}$。显然 Y 是一个线性流形。从我们已证明的知 $Y\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}D(A^n)$。为了结束证明，我们指出 Y 在 X 中稠密。事实上，如 Y 在 X 中不稠密，则由 Hahn-Banach 定理存在泛函 $x^*\in X^*$，$x^*\neq 0$ 使得 $x^*(y)=0$，对一切 $y\in Y$。因此

$$\int_0^\infty \varphi(s)x^*(T(s)x)\,ds=x^*\left(\int_0^\infty \varphi(s)T(s)xds\right)=0 \qquad (2.12)$$

对一切 $x\in X$，$\varphi\in D$ 成立。由此推出对 $x\in X$，连续函数 $s\to x^*(T(s)x)$ 在 $[0, \infty)$ 上必须恒为零。否则可以选取 $\varphi\in D$ 使得(2.12)的左端不为零。因而特别地，对 $s=0$，有 $x^*(x)=0$。这对一切 $x\in X$ 成立。所以 $x^*=0$，这和 x^* 的选择相矛盾。

我们以定理2.4的一个简单应用来结束本节。

引理 2.8 设A 是C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元，$T(t)$ 满足$\|T(t)\|\leq M$，$t\geq 0$。如果 $x\in D(A^2)$，则

$$\|Ax\|^2 \leqslant 4M^2\|A^2x\| \cdot \|x\| \tag{2.13}$$

证明 由(2.6)容易验证对 $x \in D(A^2)$，有

$$T(t)x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T(s)A^2x ds,$$

因此

$$\|Ax\| \leqslant t^{-1}(\|T(t)x\| + \|x\|) + t^{-1}\int_0^t (t-s)\|T(s)A^2x\|ds$$

$$\leqslant \frac{2M}{t}\|x\| + \frac{Mt}{2}\|A^2x\|. \tag{2.14}$$

这里我们用了 $M \geqslant 1$（因 $\|T(0)\| = 1$）。如果 $A^2x = 0$，则(2.14)推出 $Ax = 0$ 且(2.13)成立。如果 $A^2x \neq 0$，我们以 $t = 2\|x\|^{1/2}\|A^2x\|^{-1/2}$ 代入(2.14)，则(2.13)成立。

例 2.9 设X是$(-\infty, \infty)$上一致有界连续函数具上确界范数的 Banach 空间。对于$f \in X$我们定义

$$(T(t)f)(s) = f(t+s)$$

容易验证 $T(t)$是满足$\|T(t)\| \leqslant 1$，$t \geqslant 0$ 的 C_0 半群。$T(t)$的无穷小生成元定义在 $D(A) = \{f: f \in X, f'$ 存在，$f' \in X\}$ 上，且 $(Af)(s) = f'(s)$，$f \in D(A)$。由引理 2.8 我们得到 Landau 不等式

$$(\sup|f'(s)|)^2 \leqslant 4(\sup|f''(s)|)(\sup|f(s)|), \tag{2.15}$$

这里上确界取在 $(-\infty, \infty)$ 上。例 2.9 可以容易地移植到 $X = L^p(-\infty, \infty)$，$1 < p < \infty$的情况。

§1.3 Hille-Yosida 定 理

设 $T(t)$是 C_0 半群，由定理2.2存在常数 $\omega\geqslant 0$和 $M\geqslant 1$，使得$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，对一切 $t\geqslant 0$ 成立。如果 $\omega=0$，称 $T(t)$是一致有界的，而且如果 $M=1$，称 $T(t)$是 C_0 收缩半群。本节研究 C_0 收缩半群的无穷小生成元的特征。我们将给出关于一个算子 A 的预解式的性态的条件，它对于 A 是一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元是必要和充分的。

让我们回忆一下，如果 A 是 X 中的一个线性算子（不必是有界的），那么A 的预解集 $\rho(A)$是使 $\lambda I-A$ 可逆，且 $(\lambda I-A)^{-1}$ 是X 中的有界线性算子的一切复数 λ 的集合。有界线性算子族 $R(\lambda;\ A)=(\lambda I-A)^{-1}$，$\lambda\in\rho(A)$，称为 A 的预解式。

定理 3.1 (Hille-Yosida)一个线性（无界）算子A是 C_0 收缩半群 $T(t)$，$t\geqslant 0$ 的无穷小生成元当且仅当

(i) A 是闭的，且$\overline{D(A)}=X$。

(ii) A 的预解集 $\rho(A)$包含R^+，且对每一 $\lambda\geqslant 0$

$$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant\frac{1}{\lambda}. \tag{3.1}$$

定理 3.1的证明(必要性)。若 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元，则由推论2.5，A 是闭的，且 $\overline{D(A)}=X$。对于 $\lambda>0$ 和 $x\in X$，命

$$R(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \tag{3.2}$$

因为 $t \to T(t)x$ 是连续和一致有界的，作为一个反常 **Riemann** 积分，上述积分是存在的且定义一个有界线性算子 $R(\lambda)$，满足

$$\|R(\lambda)x\| \leqslant \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|dt \leqslant \frac{1}{\lambda}\|x\|。\tag{3.3}$$

而且对 $h>0$，有

$$\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)dt$$

$$= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{3.4}$$

当 $h \downarrow 0$ 时，(3.4) 的右端收敛到 $\lambda R(\lambda)x - x$。由此推出对每一 $x \in X$和 $\lambda>0$，$R(\lambda)x \in D(A)$和 $AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$，或

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I。\tag{3.5}$$

对于$x \in D(A)$，我们有

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt$$

$$= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\right) = AR(\lambda)x \tag{3.6}$$

这里我们用了定理2.4(c) 和A 的闭性。由(3.5) 和 (3.6) 得到

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x，\text{对于}x \in D(A)\text{成立。}\tag{3.7}$$

因此$R(\lambda)$是 $\lambda I - A$的逆，它对一切 $\lambda>0$ 存在，并且满足所

期望的估计(3.1)，因此条件(i)和(ii)是必要的。

为了证明条件(i)和(ii)对于 A 是一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元是充分的，我们需要一些引理。

引理 3.2 设A满足定理条件(i)和(ii)。又设 $R(\lambda; A)=(\lambda I-A)^{-1}$。则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda; A)x=x, \text{ 对于 } x\in X \text{ 成立。} \tag{3.8}$$

证明 首先设 $x\in D(A)$。则

$$\|\lambda R(\lambda; A)x-x\|=\|AR(\lambda; A)x\|=\|R(\lambda; A)Ax\|$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\|Ax\|\to 0, \text{ 当}\lambda\to\infty\text{时。}$$

但是 $D(A)$在X中稠密且$\|\lambda R(\lambda; A)\|\leqslant 1$。因此 $\lambda R(\lambda, A)x\to x$，当 $\lambda\to\infty$时，对一切 $x\in X$成立。

我们现在对每一 $\lambda>0$；定义 A 的 Yosida 逼近如下

$$A_\lambda=\lambda AR(\lambda; A)=\lambda^2R(\lambda; A)-\lambda I \tag{3.9}$$

在下述意义下，A_λ 是 A 的一个逼近。

引理 3.3 设 A 满足定理的条件(i)和(ii)。如果 A_λ 是 A 的 Yosida 逼近，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}A_\lambda x=Ax, \text{ 对于 } x\in D(A)\text{成立。} \tag{3.10}$$

证明 对于 $x\in D(A)$，由引理3.2和 A_λ 的定义有

$$\lim_{\lambda\to\infty}A_\lambda x=\lim_{\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda; A)Ax=Ax.$$

引理 3.4 设 A 满足定理3.1 的条件(i)和(ii)。如果 A_λ 是 A 的 Yosida 逼近，则 A_λ 是一个一致连续收缩半群 e^{tA} 的无穷小生成元。而且对一切 $x\in X$, λ, $\mu>0$，我们有

$$\|e^{tA_\lambda}x-e^{tA_\mu}x\|\leqslant t\|A_\lambda x-A_\mu x\|. \tag{3.11}$$

证明 由(3.9)，显然 A_λ 是一个有界线性算子，因此 A_λ 是一个有界线性算子的一致连续半群 e^{tA_λ} 的无穷小生成元（见定理1.2）。而且

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda;A)}\|$$
$$\leqslant e^{-t\lambda}e^{t\lambda^2\|R(\lambda;A)\|}\leqslant 1, \tag{3.12}$$

所以 e^{tA_λ} 是一个收缩半群。显然由定义知 e^{tA_λ}，e^{tA_μ}，A_λ 和 A_μ 可互相交换。因此

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| = \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x)ds\right\|$$

$$\leqslant\int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\|ds\leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

定理3.1的证明（充分性） 设 $x\in D(A)$，则

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|\leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|$$
$$\leqslant t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|. \tag{3.13}$$

由(3.13)和引理3.3对 $x\in D(A)$ 知 $e^{tA_\lambda}x$ 当 $\lambda\to\infty$ 时收敛，且在有界区间上收敛是一致的。因为 $D(A)$ 在 X 中稠密和 $\|e^{tA_\lambda}\|\leqslant 1$，所以

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x，对一切x\in X成立。 \tag{3.14}$$

(3.14)中的极限又重新在有界区间上是一致的，由(3.14)易知极限 $T(t)$ 满足半群性质，$T(0)=I$ 及 $\|T(t)\|\leqslant 1$。而且作为连续函数 $t\to e^{tA_\lambda}x$ 的一致极限，$t\to T(t)x$ 当 $t\geqslant 0$ 时也是连续的。因此 $T(t)$ 是 X 上的一个 C_0 收缩半群。为了结束证明，我们将指出 A 是 $T(t)$ 的无穷小生成元。设 $x\in D(A)$，则由(3.14)和定理2.4我们有

$$T(t)x-x=\lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x-x)=\lim\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x ds$$

$$=\int_0^t T(s)Axds. \tag{3.15}$$

最后的等式由 $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ 在有界区间上一致收敛到 $T(t)Ax$ 得出。设 B 是 $T(t)$ 的无穷小生成元，$x\in D(A)$。用 $t>0$ 除(3.15)，并让 $t\downarrow 0$，我们得到 $x\in D(B)$ 和 $Bx=Ax$。因此 $B\supseteq A$。因为 B 是 $T(t)$ 的无穷小生成元，由必要条件知 $1\in\rho(B)$。另一方面，我们假设（假设(ii)）$1\in\rho(A)$。由于 $B\supseteq A$，$(I-B)D(A)=(I-A)D(A)=X$ 推出 $D(B)=(I-B)^{-1}X=D(A)$。所以 $A=B$。

现在我们陈述定理 3.1和其证明包含的一些简单推伦。

推论 3.5 设 A 是 C_0 收缩半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 A_λ 是 A 的 **Yosida** 逼近，则

$$T(t)x=\lim_{\lambda\to\infty}e^{tA_\lambda}x,\ 对于x\in X成立。\tag{3.16}$$

证明 由定理3.1的证明，(3.16)的右端定义了一个 C_0 收缩半群 $S(t)$，其无穷小生成元是 A。于是从定理 2.6 得 $T(t)=S(t)$。

推论 3.6 设 A 是 C_0 收缩半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。则A的预解集包含开的右半平面，即 $\rho(A)\supseteq\{\lambda: Re\lambda>0\}$，且对这样的 λ 有

$$\|R(\lambda; A)\|\leqslant\frac{1}{Re\lambda}. \tag{3.17}$$

证明 当 λ 满足 $Re\lambda>0$ 时，可以定义算子 $R(\lambda)x=$

$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$。在定理3.1的必要性的证明中已指出 $R(\lambda)=(\lambda I-A)^{-1}$，因此 $\rho(A)\supseteq\{\lambda:\ Re\lambda>0\}$。$R(\lambda)$的估计式(3.17)是显然的。

下面的例子表明 C_0 收缩半群的无穷小生成元的预解集不一定包含比开右半平面更太的集合。

例 3.7 设 $X=BU(0,\ \infty)$，即$[0,\ \infty)$上一切有界的一致连续函数的空间。定义

$$(T(t)f)(s)=f(t+s) \tag{3.18}$$

$T(t)$ 是 X 上一个 Co 收缩半群。其无穷小生成元 A 由下式给出：

$$D(A)=\{f:\ f\text{和}f'\in X\} \tag{3.19}$$

和对于 $f\in D(A)$，

$$(Af)(s)=f'(s). \tag{3.20}$$

由推伦3.6我们知$\rho(A)\supseteq\{\lambda:\ Re\lambda>0\}$。对于每个复数 λ，方程 $(\lambda-A)\varphi_\lambda=0$ 有非平凡解 $\varphi_\lambda(s)=e^{\lambda s}$。如果 $Re\lambda\leqslant 0$，则 $\varphi_\lambda\in X$，因此闭的左半平面在A的谱 $\sigma(A)$中。

设 $T(t)$是 C_0 半群满足$\|T(t)\|\leqslant e^{\omega t}$（对于某个$\omega\leqslant 0$）。考虑 $S(t)=e^{-\omega t}T(t)$。显然 $S(t)$是一个 C_0 收缩半群。如果A是 $T(t)$的无穷小生成元，则 $A-\omega I$ 是 $S(t)$的无穷小生成元。另一方面，如果A是 C_0 收缩半群 $S(t)$的无穷小生成元，则 $A+\omega I$ 是满足$\|T(t)\|\leqslant e^{\omega t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。实际上 $T(t)=e^{\omega t}S(t)$。这些注记引导我们给出满足$\|T(t)\|\leqslant e^{\omega t}$ 的 C_0 半群的无穷小生成元的特征。

推论 3.8 线性算子 A 是一个满足$\|T(t)\|\leqslant e^{\omega t}$ 的C_0半

群的无穷小生成元当且仅当

(i) A 是闭的，且 $\overline{D(A)}=X$。

(ii) A 的预解集 $\rho(A)$ 包含射线 $\{\lambda: Im\lambda=0, \lambda>\omega\}$，且对这样的 λ 有

$$\|R(\lambda; A)\|\leqslant\frac{1}{\lambda-\omega}. \tag{3.21}$$

我们以一个经常用于证明一个给定的算子 A 满足 Hille-Yosida 定理（定理 3.1）的充分条件，因而它是 C_0 收缩半群的无穷小生成元的结果来结束本节。

设 X 是 Banach 空间，X^*是其对偶。我们以 $\langle x^*, x\rangle$ 或 $\langle x, x^*\rangle$ 表示 $x^*\in X^*$在 $x\in X$ 的值。设 A是 X 中一个线性算子，其数值域 $S(A)$是集合

$$S(A)=\{\langle x^*, Ax\rangle: x\in D(A), \|x\|=1,$$
$$x^*\in X^*, \|x^*\|=1, \langle x^*, x\rangle=1\}. \tag{3.22}$$

定理 3.9 设A是一个闭线性算子，其定义域$D(A)$在X中稠密。设 $S(A)$ 是 A 的数值域，且 Σ 是 $\overline{S(A)}$ 在$\mathbf{C}$中的补。如果 $\lambda\in\Sigma$，则 $\lambda I-A$ 是一对一的，且有闭值域。此外，如果 Σ_0 是满足 $\rho(A)\cap\Sigma_0\neq\phi$ 的 Σ 的一个分支，则 A 的谱包含于 Σ_0 的补 S_0，且

$$\|R(\lambda; A)\|\leqslant\frac{1}{d(\lambda: \overline{S(A)})}, \tag{3.23}$$

这里 $d(\lambda: \overline{S(A)})$ 是 λ 到 $\overline{S(A)}$ 的距离。

证明 设 $\lambda\in\Sigma$，如果 $x\in(A)$，$\|x\|=1$，$x^*\in X^*$，$\|x^*\|=1$ 和 $\langle x^*, x\rangle=1$，那么

$$0 < d(\lambda;\ \overline{S(A)}) \leqslant |\lambda - \langle x^*,\ Ax\rangle|$$
$$= |\langle x^*,\ \lambda x - Ax\rangle| \leqslant \|\lambda x - Ax\|. \tag{3.24}$$

因此 $\lambda I - A$是一对一的，且有闭值域。而且如果 $\lambda \in \rho(A)$，则(3.24)推出(3.23)，并且

$$d(\lambda;\ \overline{S(A)}) \leqslant \|R(\lambda;\ A)\|^{-1} \tag{3.25}$$

剩下我们指出如果 Σ_0 是一个与 A 的预解集 $\rho(A)$ 有非空交的 Σ 分支，则 $\sigma(A) \subseteq S_0$。为此考虑集合 $\rho(A) \cap \Sigma_0$。显然这个集合在 Σ_0 中是开的。但该集在 Σ_0 中也是闭的。因为 $\lambda_n \in \rho(A) \cap \Sigma_0$ 和 $\lambda_n \to \lambda_0 \in \Sigma_0$ 导致对充分大的 n 有 $d(\lambda_n:\ \overline{S(A)}) > \frac{1}{2} d(\lambda:\ \overline{S(A)}) > 0$，因此对充分大的 n，由(3.25) λ 位于中心在 λ_n，半径小于 $\|R(\lambda_n;\ A)\|^{-1}$ 的球中，由此推出 $\lambda \in \rho(A)$。从而 $\rho(A) \cap \Sigma_0$ 在 Σ_0 中是闭的。所以由 Σ_0 的连通性知 $\rho(A) \cap \Sigma_0 = \Sigma_0$ 或者 $\rho(A) \supseteq \Sigma_0$，这等价于 $\sigma(A) \subseteq S_0$。证毕。

§1.4 Lumer-Phillips 定理

在前一节中我们看到 C_0 收缩半群的无穷小生成元的 Hille-Yosida 特征。在本段中我们将看到这种无穷小生成元的一个不同的特征。为了叙述和证明该结果，我们需要做些准备工作。

设X是一个Banach空间，X^*是其对偶。我们以 $\langle x^*,\ x\rangle$ 或$\langle x,\ x^*\rangle$或表 $x^* \in X^*$在 $x \in X$ 的值。对于每个 $x \in X$，我

们定义对偶集 $F(x)\subseteq X^*$如下：

$$F(x)=\{x^*;\ x^*\in X^*,\ 且\ \langle x^*,\ x\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\}. \tag{4.1}$$

对每一$x\in X$，由 Hahn-Banach 定理知 $F(x)\neq\phi$。

定义 4.1 一个线性算子A 称为耗散的，如果对于每一$x\in D(A)$，存在 $x^*\in F(x)$，使得 $Re\langle Ax,\ x^*\rangle\leqslant 0$。

耗散算子的一个有用的特征给出如下：

定理 4.2 一个线性算子A 是耗散的当且仅当

$$\|(\lambda I-A)x\|\geqslant\lambda\|x\|,\ 对一切\ x\in D(A)和\ \lambda>0\ 成立。 \tag{4.2}$$

证明 设A是耗散的，$\lambda>0$且 $x\in D(A)$。如果 $x^*\in F(x)$和$Re\langle Ax,\ x^*\rangle\leqslant 0$，则

$$\|\lambda x-Ax\|\cdot\|x\|\geqslant|\langle\lambda x-Ax,\ x^*\rangle|$$
$$\geqslant Re\langle\lambda x-Ax,\ x^*\rangle\geqslant\lambda\|x\|^2,$$

由此即知(4.2)成立。反之，设 $x\in D(A)$，$\lambda\|x\|\leqslant\|\lambda x-Ax\|$对一切 $\lambda>0$ 成立，若 $y_\lambda^*\in F(\lambda x-Ax)$ 和 $z_\lambda^*=y_\lambda^*/\|y_\lambda^*\|$，则$\|z_\lambda^*\|=1$ 和

$$\lambda\|x\|\leqslant\|\lambda x-Ax\|=\langle\lambda x-Ax,\ z_\lambda^*\rangle$$
$$=\lambda Re\langle x,\ z_\lambda^*\rangle-Re\langle Ax,z_\lambda^*\rangle\leqslant\lambda\|x\|-Re\langle Ax,\ z_\lambda^*\rangle$$

对一切 $\lambda>0$ 成立。因此

$$Re\langle Ax,\ z_\lambda^*\rangle\leqslant 0,\ 且\ Re\langle x,\ z_\lambda^*\rangle\geqslant\|x\|-\frac{1}{\lambda}\|Ax\|, \tag{4.3}$$

因为 X^*的单位球在 X^* 的弱*拓扑下是紧的，所以当 $\lambda\to\infty$时，网 z_λ^* 有 弱* 聚点 $z^*\in X^*$，$\|z^*\|\leqslant 1$。由 (4.3) 得 $Re\langle Ax,\ z^*\rangle\leqslant 0$ 和 $Re\langle x,\ z^*\rangle\geqslant\|x\|$。但 $Re\langle x,\ z^*\rangle\leqslant|\langle x,$

$z^*\rangle|\leqslant\|x\|$，所以 $\langle x, z^*\rangle=\|x\|$。令 $x^*=\|x\|z^*$ 我们有 $x^*\in F(x)$和 $Re\langle Ax, x^*\rangle\leqslant 0$。于是对于一切 $x\in D(A)$，存在 $x^*\in F(x)$，使得 $Re\langle Ax, x^*\rangle\leqslant 0$，因而$A$是耗散的。

定理 4.3 (Lumer-Phillips)设A是X中具有稠定义域的线性算子

(a) 如果A是耗散的，且存在 $\lambda_0>0$，使得 $\lambda_0 I-A$ 的值域 $R(\lambda_0 I-A)$是 X，则 A 是一个 X 上 C_0 收缩半群的无穷小生成元。

(b) 如果A是X上一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元，则对一切 $\lambda>0$，$R(\lambda I-A)=X$，且A是耗散的。此外，对每一 $x\in D(A)$和每一 $x^*\in F(x)$，有 $Re\langle Ax, x^*\rangle\leqslant 0$。

证明 设 $\lambda>0$，由定理4.2，A 的耗散性推出

$$\|\lambda x-Ax\|\geqslant\lambda\|x\|, \text{对一切 } \lambda>0 \text{ 和 } x\in D(A)\text{成立。} \tag{4.4}$$

因为 $R(\lambda_0 I-A)=X$，由 (4.4)，当 $\lambda=\lambda_0$ 时知$(\lambda_0 I-A)^{-1}$是有界线性算子，因此是闭的，由此 $\lambda_0 I-A$ 是闭的，故 A 也是闭的。如果对每一$\lambda>0$，有 $R(\lambda I-A)=X$，则由(4.4)，$\rho(A)\supseteq(0, \infty)$和$\|R(\lambda; A)\|\leqslant\lambda^{-1}$。从而由 Hille-Yosida 定理知$A$是 X上一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元。

为了完成(a)的证明，剩下需要指出对所有 $\lambda>0$，有 $R(\lambda I-A)=X$。考虑集合

$$\wedge=\{\lambda: 0<\lambda<\infty\text{和 } R(\lambda I-A)=X\}.$$

设 $\lambda\in\wedge$，由(4.4)，$\lambda\in\rho(A)$。因为 $\rho(A)$ 是开的，所以存在 λ 的一个在 $\rho(A)$中的邻域。这个邻域和实轴的交显然在$\wedge$中，因此$\wedge$是开的。另一方面，设 $\lambda_n\in\wedge$，$\lambda_n\to\lambda>0$。对于每一 $y\in X$，存在 $x_n\in D(A)$，使得

$$\lambda_n x_n - Ax_n = y \tag{4.5}$$

由(4.4)，存在常数 $C>0$，使得$\|x_n\|\leqslant\lambda_n^{-1}\|y\|\leqslant C$。现在

$$\lambda_n\|x_n - x_m\|\leqslant \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\|$$
$$= |\lambda_n - \lambda_m|\,\|x_m\|\leqslant C|\lambda_n - \lambda_m|. \tag{4.6}$$

因此$\{x_n\}$是一个 Cauchy 序列。设 $x_n\to x$。则由(4.5)$Ax_n\to \lambda x - y$。因为 A 是闭的，所以 $x\in D(A)$，且 $\lambda x - Ax = y$。因此$R(\lambda I - A) = X$和$\lambda\in\wedge$。由此$\wedge$在$(0,\ \infty)$中也是闭的。且因为由假设 $\lambda_0\in\wedge$，故$\wedge\neq\phi$，所以 $\wedge=(0,\ \infty)$。这就完成了(a)的证明。

如果A是X上一个 C_0 收缩半群$T(t)$的无穷小生成元，则由Hille-Yosida定理知 $\rho(A)\supseteq(0,\ \infty)$，因此$R(\lambda I - A) = X$对一切 $\lambda>0$成立，而且，如果 $x\in D(A)$，$x^*\in F(x)$，则

$$|\langle T(t)x,\ x^*\rangle|\leqslant\|T(t)x\|\cdot\|x^*\|\leqslant\|x\|^2$$

因此

$$Re\langle T(t)x - x,\ x^*\rangle = Re\langle T(t)x,\ x^*\rangle - \|x\|^2\leqslant 0. \tag{4.7}$$

用 $t>0$ 除(4.7)，并让 $t\downarrow 0$ 得

$$Re\langle Ax,\ x^*\rangle\leqslant 0. \tag{4.8}$$

这对一切 $x^*\in F(x)$成立，从而完成了证明。

推论 4.4 设A是一个稠密定义的闭线性算子。如果 A 和 A^*都是耗散的，则 A 是X 上一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元。

证明 由定理4.3(a)这只须证明 $R(I-A)=X$。因为A是耗散的和闭的，所以 $R(I-A)$ 是 X 的一个闭子空间。如果 $R(I-A)\neq X$，则存在 $x^*\in X^*$，$x^*\neq 0$，使得 $\langle x^*,\ x - Ax\rangle = 0$，$x\in D(A)$。由此推出 $x^* - A^*x^* = 0$。因为 A^*

也是耗散的，由定理4.2知 $x^*=0$。这与 x^*的取法矛盾。

我们以耗散算子的一些性质来结束本节。

定理 4.5 设A是X中的耗散算子

(*a*) 如果对某 $\lambda_0>0$，$R(\lambda_0 I-A)=X$，则对一切 $\lambda>0$，有 $R(\lambda I-A)=X$。

(*b*) 如果 A是可闭的，则 A 的闭包 $\overline{A}$也是耗散的。

(*c*) 如果 $\overline{D(A)}=X$，则 A 是可闭的。

证明 结论(*a*)在定理4.3(*a*)中已被证明。为了证明(*b*)。设 $x\in D(\overline{A})$，$y=\overline{A}x$。则存在一个序列 $\{x_n\}$，$x_n\in D(A)$，使得 $x_n\to x$ 和 $Ax_n\to y=\overline{A}x$。对于 $\lambda>0$，由定理 4.2 得 $\|\lambda x_n-Ax_n\|\geqslant\lambda\|x_n\|$。让 $n\to\infty$我们有

$$\|\lambda x-\overline{A}x\|\geqslant\lambda\|x\|，\text{对于 } \lambda>0 \text{ 成立。} \tag{4.9}$$

因为对每一 $x\in D(\overline{A})$ (4.9) 成立，由定理 4.2，$\overline{A}$是耗散的。为了证明(*c*)。设 A 不是可闭的，则存在序列 $\{x_n\}$，使得 $x_n\in D(A)$，$x_n\to 0$ 和 $Ax_n\to y$，且$\|y\|=1$。由定理 4.2对每一 $t>0$ 和 $x\in D(A)$

$$\|(x+t^{-1}x_n)-tA(x+t^{-1}x_n)\|\geqslant\|x+t^{-1}x_n\|.$$

让 $n\to\infty$，则当 $t\to 0$ 得$\|x-y\|\geqslant\|x\|$，对一切 $x\in D(A)$成立。但因 $D(A)$在 X 中稠密，这是不可能的。因此 A 是可闭的。

定理 4.6 设A 是耗散的，且 $R(I-A)=X$。如果X 是自反的，则$\overline{D(A)}=X$。

证明 设 $x^*\in X^*$使得对每一 $x\in D(A)$ 有 $\langle x^*, x\rangle=0$。我们证明 $x^*=0$。因为 $R(I-A)=X$，这只须证明对每一

$x \in D(A)$, $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ 等价于对每一 $x \in D(A)$, $\langle x^*, Ax \rangle = 0$。设 $x \in D(A)$，则由定理 4.5(a) 存在 x_n, 使得 $x = x_n - \frac{1}{n} A x_n$。因为 $Ax_n = n(x_n - x) \in D(A)$, $x_n \in D(A^2)$ 和 $Ax = Ax_n - \frac{1}{n} A^2 x_n$ 或 $Ax_n = \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1} Ax$。由定理 4.2得 $\left\| \left(I - \frac{1}{n} A \right)^{-1} \right\| \leqslant 1$，因此 $\|Ax_n\| \leqslant \|Ax\|$。又因 $\|x_n - x\| \leqslant \frac{1}{n} \|Ax_n\| \leqslant \frac{1}{n} \|Ax\|$, 故 $x_n \to x$。因为 $\|Ax_n\| \leqslant C$ 和 X 是自反的，故存在 Ax_n 的子序列 Ax_{n_k}, 使得 $Ax_{n_k} \to x$(弱)。由 A的闭性（见定理4.3(a)）知 $y = Ax$。最后，因为对每一 $z \in D(A)$, $\langle x^*, z \rangle = 0$, 我们有

$$\langle x^*, Ax_{n_k} \rangle = n_k \langle x^*, x_{n_k} - x \rangle = 0 \tag{4.10}$$

在(4.10)中让 $n_k \to \infty$ 得$\langle x^*, Ax \rangle = 0$。这对一切 $x \in D(A)$ 成立，所以 $x^* = 0$和$\overline{D(A)} = X$。

下面的例子说明定理 4.6 对一般的 Banach 空间不成立。

例 4.7 设$X = C([0, 1])$是[0,1]上的连续函数具上确界范数的空间。设 $D(A) = \{u: u \in C^1([0, 1])且 u(0) = 0\}$, 对于 $u \in D(A)$, $Au = -u'$。对每一 $f \in X$ 和 $\lambda > 0$, 方程 $\lambda u - Au = f$ 有一解 u 如下：

$$u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi - x)} f(\xi) d\xi \tag{4.11}$$

这表明 $R(\lambda I-A)=X$。由(4.11)也得

$$\lambda|u(x)|\leqslant(1-e^{-\lambda x})\|f\|\leqslant\|\lambda u-Au\|. \tag{4.12}$$

在(4.12)的左端对$x\in[0, 1]$取上确界得 $\lambda\|u\|\leqslant\|\lambda u-Au\|$，因此由定理4.2知 A 是耗散的。但是 $\overline{D(A)}=\{u: u\in X$ 且 $u(0)=0\}\neq X=C([0, 1])$。

§1.5 C_0半群的无穷小生成元的特征

在前面两节中我们给出了两个 C_0 收缩半群的无穷小生成元的特征。在§1.3节的末尾我们看到这些特征导出了满足 $\|T(t)\|\leqslant e^{\omega t}$ 的 C_0 有界算子半群的无穷小生成元的特征。现在我们推导一般的 C_0 有界算子半群的无穷小生成元的特征。由定理 2.2 对这种半群存在实常数 $M\geqslant1$ 和 ω，使得 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$。用1.3 节末尾所用的类似方法我们指出为了在一般情形下刻划无穷小生成元的特征，只须刻划一致有界 C_0 半群的无穷小生成元的特征。这可以通过对 Banach 空间重新赋予范数得到。在这样的新范数下，一致有界 C_0 半群变成一个C_0 收缩半群，然后引用前面证明的 C_0 收缩半群的无穷小生成元的特征即可。

我们从一个重新赋范引理开始。

引理 5.1 设A是一个线性算子，$\rho(A)\supset(0, \infty)$。如果

$$\|\lambda^n R(\lambda; A)^n\|\leqslant M, \quad n=1, 2, \cdots, \lambda>0 \tag{5.1}$$

则存在X 上的一个范数$|\cdot|$，它和 X 上的原有范数等价，且满足

$$\|x\|\leqslant|x|\leqslant M\|x\|,\ \text{对于}x\in X\text{成立} \tag{5.2}$$

和

$$|\lambda R(\lambda;\ A)x|\leqslant|x|,\ \text{对于 } x\in X \text{ 和 } \lambda>0 \text{ 成立。} \tag{5.3}$$

证明 设 $\mu>0$ 和

$$\|x\|_\mu=\sup_{n\geqslant 0}\|\mu^n R(\mu;\ A)^n x\|. \tag{5.4}$$

则显然

$$\|x\|\leqslant\|y\|_\mu\leqslant M\|x\| \tag{5.5}$$

和

$$\|\mu R(\mu;\ A)\|_\mu\leqslant 1. \tag{5.6}$$

我们指出

$$\|\lambda R(\lambda,\ A)\|_\mu\leqslant 1,\ \text{对于}0<\lambda\leqslant\mu\ \text{成立。} \tag{5.7}$$

事实上，如果 $y=R(\lambda;\ A)x$，则 $y=R(\mu;\ A)(x+(\mu-\lambda)y)$，且由(5.6)

$$\|y\|_\mu\leqslant\frac{1}{\mu}\|x\|\mu+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu$$

因此正如所要求的 $\lambda\|y\|_\mu\leqslant\|x\|_\mu'$。从(5.5)和(5.7)得

$$\begin{aligned}\|\lambda^n R(\lambda;\ A)^n x\|&\leqslant\|\lambda^n R(\lambda;\ A)^n x\|_\mu\\&\leqslant\|x\|_\mu,\ \text{对于 } 0<\lambda\leqslant\mu \text{ 成立。}\end{aligned} \tag{5.8}$$

在(5.8)的左端对 $n\geqslant 0$取上确界得$\|x\|_\lambda\leqslant\|x\|_\mu$ 对于 $0<\lambda\leqslant\mu$ 成立。最后我们定义

$$|x|=\lim_{\mu\to\infty}\|x\|_\mu. \tag{5.9}$$

则由(5.5)知(5.2)成立。在(5.8)中取 $n=1$ 我们有

$$\|\lambda R(\lambda;\ A)x\|_\mu\leqslant\|x\|_\mu,$$

让$\mu\to\infty$得(5.3)。

引理5.1是和以下评述密切相关的。设$\{B_\gamma\}$，$\gamma\in\Gamma$是一个一致有界的可交换线性算子族。则在X上存在一个等价范数，在该范数下所有B_γ都是收缩的，当且仅当存在常数M，使得

$$\|B_{\gamma_1}B_{\gamma_2}\cdots B_{\gamma_m}x\|\leqslant M\|x\| \tag{5.10}$$

对一切Γ的有限子集$\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_m\}$成立。事实上，显然，如果存在一个等价范数，则（5.10）被满足。另一方面如果(5.10)被满足，我们定义

$$|x|=\sup\|B_{\gamma_1}B_{\gamma_2}\cdots B_{\gamma_m}x\|, \tag{5.11}$$

这里上确界是Γ的一切有限子集（包括空集)上取的，且$|\cdot|$是所期望的等价范数。较弱的条件

$$\|B_\gamma^n x\|\leqslant M\|x\|,\ \text{对一切}\ \gamma\in\Gamma\ \text{和}\ n\geqslant 0\text{成立。} \tag{5.12}$$

在一般情形下对于保证存在等价范数，使得所有B_γ在该范数下是收缩的是不充分的。在$\Gamma=\mathbf{R}^+$和$B_\gamma=R(\lambda;\ A)$，A是某固定的线性算子的特殊情形，上述引理指出较弱的条件(5.12)对于保证存在这种等价范数是充分的。

定理 5.2 线性算子A是一个满足$\|T(t)\|\leqslant M(M\geqslant 1)$的$C_0$半群$T(t)$的无穷小生成元当且仅当

（i） A是闭的，且$D(A)$在X中是稠密的。

（ii） A的预解集$\rho(A)$包含$\mathbf{R}^+$，且

$$\|R(\lambda;\ A)^n\|\leqslant M/\lambda^n,\ \text{对于}\ \lambda>0,\ n=1,\ 2,\ \cdots\text{成立。} \tag{5.13}$$

证明 设$T(t)$是 **Banach** 空间X上的C_0半群，A是

其无穷小生成元，如果X中的范数被更换成一个等价范数，则 $T(t)$在新的范数下仍然是C_0半群。同时，对于X上等价范数的引入，无穷小生成元A不会改变，它是闭的和稠定的事实也不会改变。这些均为拓扑性质，它们不依赖于X所具有的特殊的等价范数。

设 A 是满足 $\|T(t)\|\leqslant M$ 的 C_0 半群的无穷小生成元。定义

$$|x| = \sup_{t\geq 0}\|T(t)x\| \tag{5.14}$$

则

$$\|x\|\leqslant|x|\leqslant M\|x\| \tag{5.15}$$

因此 $|\cdot|$ 是 X 上的一个范数，且与 X 上原来的范数等价。而且

$$|T(t)x| = \sup_{s\geq 0}\|T(s)T(t)x\|\leqslant\sup_{s\geq 0}\|T(s)x\| = |x| \tag{5.16}$$

和 $T(t)$ 是X在赋予范数 $|\cdot|$ 下的C_0收缩半群。由 **Hille-Yosida** 定理和证明开始时的注记知 A 是闭的和稠定义的，并且 $|R(\lambda;\ A)|\leqslant\lambda^{-1}$，$\lambda>0$。因此由(5.15)和 (5.16)我们有

$$\|\lambda^n R(\lambda;\ A)^n x\|\leqslant|\lambda^n R(\lambda;\ A)^n x|\leqslant|x|\leqslant M\|x\|$$

和条件(i)和(ii)是必需的。

设条件(i)和(ii)被满足。由引理5.1 存在一个 X 上的范数$|\cdot|$满足(5.2)和(5.3)。由于 X 具有这个范数时，A 是一个闭的稠密定义的算子，$\rho(A)\supset(0,\ \infty)$ 和对于 $\lambda>0$，$|R(\lambda;\ A)|\leqslant\lambda^{-1}$。根据 **Hille-Yosida** 定理，$A$ 是具有这种范数$|\cdot|$的空间X中C_0收缩半群的无穷小生成元。回到原来

的范数，A 又是 $T(t)$ 的无穷小生成元，且

$$\|T(t)x\|\leqslant|T(t)x|\leqslant|x|\leqslant M\|x\|$$

因此正如所需要的，$\|T(t)\|\leqslant M$。于是条件(i)和(ii)也是充分的。

如果$T(t)$是 X 上的一个一般的 C_0 半群，则由定理2.2存在常数 $M\geqslant 1$ 和 ω，使得

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t} \tag{5.17}$$

考虑 C_0 半群 $S(t)=e^{\omega t}T(t)$，则$\|S(t)\|\leqslant M$ 且 A 是 $T(t)$的无穷小生成元，当且仅当 $A-\omega I$ 是 $S(t)$的无穷小生成元。由这些注记和定理5.2我们得到

定理 5.3 线性算子A 是一个满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群的无穷小生成元当且仅当

(i) A 是闭的，且 $D(A)$在X 中是稠密的，

(ii) A的预解式 $\rho(A)$包含射线(ω, ∞)，且

$$\|R(\lambda; A)^n\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\omega)^n}，对于 \lambda>\omega，n=1, 2, \cdots成立。 \tag{5.18}$$

注 5.4 每一个大于 ω 的实数λ在A 的预解集中的条件同估计(5.18)一起可推出每一满足 $Re\lambda>\omega$ 的复数 λ 在A 的预解集中，且

$$\|R(\lambda; A)^n A\|\leqslant\frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n}，对于 \lambda>\omega，n=1,2, \cdots成立。 \tag{5.19}$$

证明 我们定义

$$R(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

因为$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，所以对一切满足 $Re\lambda>\omega$ 的 λ，$R(\lambda)$是可定义的。用一个和定理3.1 的证明完全相同的方法可得 $R(\lambda)=R(\lambda;\ A)$。为了证明(5.19)，我们设 $Re\lambda>\omega$，则

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda;\ A)x=\frac{d}{d\lambda}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt=-\int_0^{\infty}te^{-\lambda t}T(t)xdt$$

通过归纳法我们得到

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;\ A)x=(-1)^n\int_0^{\infty}t^n e^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{5.20}$$

另一方面，由预解恒等式

$$R(\lambda;\ A)-R(\mu;\ A)=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ A)R(\mu;\ A)$$

得知对一切 $\lambda\in\rho(A)$，$\lambda\to R(\lambda;\ A)$ 是解析的，且

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda;\ A)=-R(\lambda;\ A)^2 \tag{5.21}$$

再通过归纳法我们有

$$\frac{d^nR(\lambda;\ A)}{d\lambda^n}=(-1)^n n!R(\lambda;\ A)^{n+1} \tag{5.22}$$

比较(5.20)和(5.21)得

$$R(\lambda;\ A)^n x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)xdt \tag{5.23}$$

因此

$$\|R(\lambda;\ A)^n x\|\leqslant\frac{M}{(n-1)!}\int_0^{\infty}t^{n-1}e^{(\omega-Re\lambda)t}\|x\|dt$$

$$=\frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n}\|x\|.$$

我们通过推广推论3.5 的表达公式到一般情形来结束本节。

定理 5.5 设A是X 上 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元，A_λ 是 A 的 Yosida 逼近，即 $A_\lambda=\lambda AR(\lambda;\ A)$，则

$$T(t)x=\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{5.24}$$

证明 我们首先考虑$\|T(t)\|\leqslant M$ 的情形。在定理5.2的证明中，我们在X 上给出了一个和X 中原有范数$\|\cdot\|$等价的范数$|||\cdot|||$，且 $T(t)$在该范数下是一个 C_0 收缩半群。由推论3.5得知对一切 $x\in X$，当$\lambda\to\infty$时有$|||e^{tA_\lambda}x-T(t)x|||\to 0$。因为$|||\cdot|||$等价于$\|\cdot\|$，所以(5.24)在 X 中成立。在$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$的一般情形，当 $\omega\leqslant 0$ 时，我们有$\|T(t)\|\leqslant M$，因此由刚才所证明的知结果成立。剩下只须证明当 $\omega>0$ 时的结果。设 $\omega>0$ 并注意$\lambda\to\|e^{tA_\lambda}\|$当 $\lambda>\omega$ 时是有界的。事实上

$$\|e^{tA_\lambda}\|=e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t}\|\leqslant e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}t^k\|R(\lambda;\ A)^k\|}{k!}$$

$$\leqslant Me^{(\lambda\omega/\lambda-\omega)t}\leqslant Me^{2\omega t} \tag{5.25}$$

下面我们考虑一致有界半群 $S(t)=e^{-\omega t}T(t)$，其无穷小生成元是 $A-\omega I$。从证明的前一部分我们有

$$T(t)x=\lim_{\lambda\to\infty} e^{t(A-\omega I)_\lambda+\omega t}x,\ 对于\ x\in X\ 成立。 \tag{5.26}$$

简单计算指出

$$(A-\omega I)_\lambda+\omega I=A_{\lambda+\omega}+H(\lambda)$$

这里

$$H(\lambda)=2\omega I-\omega(\omega+2\lambda)R(\lambda+\omega;\ A)$$
$$=\omega[\omega R(\lambda+\omega;\ A)-2AR(\lambda+\omega;\ A)].$$

容易验证$\|H(\lambda)\|\leqslant 2\omega+(2\omega+\lambda^{-1}\omega^2)M$ 和对于 $x\in D(A)$，

当 $\lambda\to\infty$ 时，$\|H(\lambda)x\|\leqslant M\lambda^{-1}(\omega\|x\|+2\omega\|Ax\|)\to 0$。因此当 $\lambda\to\infty$ 时 $H(\lambda)x\to 0$ 对于每一$x\in X$成立。因为

$$\|e^{tH(\lambda)}x-x\|\leqslant te^{t\|H(\lambda)\|}\|H(\lambda)x\|,$$

我们有

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tH(\lambda)}x=x,\ 对于x\in X成立。\tag{5.27}$$

最后，因为 $H(\lambda)$和$A_{\lambda+\omega}$ 可交换，我们有

$$\|e^{tA_\lambda}x-T(t)x\|\leqslant\|e^{tA_\lambda+tH(\lambda-\omega)}x-T(t)x\|$$
$$+\|e^{tA_\lambda}\|\cdot\|e^{tH(\lambda-\omega)}x-x\|。\tag{5.28}$$

当 $\lambda\to\infty$时，由(5.26)知右端第一项趋于零，而由(5.25)和(5.27)知第二项趋于零。因此

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x=T(t)x,\ 对于 x\in X成立$$

证毕。

§1.6 有界算子群

定义 6.1 Banach空间 X 上的有界线性算子的单参数族 $T(t)$，$-\infty<t<\infty$，称为C_0 有界算子群，如果它满足

(i) $T(0)=I$,

(ii) $T(t+s)=T(t)T(s)$ 对于$-\infty<t$, $s<\infty$ 成立，

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x=x$ 对于$x\in X$成立。

定义 6.2 一个群 $T(t)$的无穷小生成元 A 定义如下：

$$Ax=\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t}\tag{6.1}$$

只要极限存在；A的定义域是所有使极限(6.1)存在的元素$x\in X$的集合。

注意在(6.1)中，$t\to 0$ 是从两边而不象在 C_0 半群的无穷小生成元的情形仅是 $t\to 0^+$。

设 $T(t)$是一个C_0 有界算子群。显然，由定义，当 $t\geqslant 0$ 时，$T(t)$是 C_0 有界算子半群，其无穷小生成元是 A。此外，当 $t\geqslant 0$ 时，$S(t)=T(-t)$也是一个 C_0 有界算子半群，其无穷小生成元是A。因此如果 $T(t)$是X 上的 C_0 有界算子群，A和$-A$ 两者都是 C_0 半群，分别记为 $T_+(t)$ 和 $T_-(t)$，的无穷小生成元。反之，如果A 和$-A$ 分别是C_0 半群 $T_+(t)$ 和$T_-(t)$的无穷小生成元，则我们将看到A是如下 C_0 群的无穷小生成元

$$T(t)=\begin{cases} T_+(t), & \text{当 } t\geqslant 0 \text{ 时。} \\ T_-(t), & \text{当 } t\leqslant 0 \text{ 时。} \end{cases} \tag{6.2}$$

定理 6.3 A是一个满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega|t|}$ 的 C_0 有界算子群的无穷小生成元当且仅当

(i) A是闭的和 $\overline{D(A)}=X$。

(ii) 每一个$|\lambda|>\omega$ 的实数 λ 在A的预解集 $\rho(A)$中，且对这样的 λ 有

$$\|R(\lambda; A)^n\|\leqslant M(|\lambda|-\omega)^{-n}, \text{对于 } n=1, 2, \cdots\text{成立。} \tag{6.3}$$

证明 条件的必要性从这样的事实推出：A 和$-A$ 都是满足估计$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 有界算子半群的无穷小生成元。因为A 是如此半群的无穷小生成元，定理5.3推出 A 是闭的，$\overline{D(A)}=X$ 和当 $\lambda>\omega$ 时(6.3)成立。此外，因为$-A$

亦是如此半群的无穷小生成元，并且显然地 $R(\lambda; -A)=-R(-\lambda; A)$，因此 $\sigma(-A)=-\sigma(A)$ 和(6.3)对于 $-\lambda<-\omega$ 成立。于是条件(i)和(ii)是必要的。

如果条件(i)和(ii)成立，由定理5.3知 A 和 $-A$ 分别是 C_0 半群 $T_+(t)$ 和 $T_-(t)$ 的无穷小生成元，并且 $\|T_\pm(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$. 显然 e^{tA_λ} 和 e^{tA_μ} 可交换，这里 A_λ 是 A 的Yosida逼近。并且由定理5.5，$T_+(t)x=\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ 和 $T_-(t)x=\lim\limits_{\mu\to\infty}e^{-tA_\mu}x$，

因此半群 $T_+(t)$ 和 $T_-(t)$ 可交换。命 $\omega(t)=T_+(t)T_-(t)$，则对于 $t\geqslant 0$，$\omega(t)$ 是一个 C_0 有界算子半群，对于 $x\in D(-A)$ 我们有

$$\frac{\omega(t)x-x}{t}=T_-(t)\frac{T_+(t)x-x}{t}+\frac{T_-(t)x-x}{t}$$

$$\to Ax-Ax=0, \quad 当\ t\downarrow 0时. \tag{6.4}$$

因此对 $x\in D(A)$ 有 $\omega(t)x=x$. 因为 $D(A)$ 在 X 中稠密和 $\omega(t)$ 是有界的，我们有 $\omega(t)=I$，或者 $T_-(t)=(T_+(t))^{-1}$.

定义

$$T(t)=\begin{cases} T_+(t), & 当\ t\geqslant 0\ 时\\ T_-(t), & 当\ t\leqslant 0\ 时. \end{cases} \tag{6.5}$$

我们得到一个满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 有界算子群。因而条件(i)和(ii)是充分的，证毕。

引理 6.4 设 $T(t)$ 是一个 C_0 有界算子半群。如果对于每一 $t>0$，$T(t)^{-1}$ 存在且是一个有界算子，则 $S(t)=T(t)^{-1}$ 是 C_0 有界算子半群，其无穷小生成元是 $-A$。此外，如果

$$U(t)=\begin{cases} T(t), & 当\ t\geqslant 0\ 时\\ T(-t)^{-1}, & 当 t\leqslant 0 时, \end{cases}$$

则$U(t)$是一个 C_0 有界算子群。

证明 $S(t)$的半群的性质是显然的，因为

$$S(t+s)=T(t+s)^{-1}=(T(t)T(s))^{-1}$$
$$=T(s)^{-1}T(t)^{-1}=S(s)S(t).$$

我们证明 $S(t)$的强连续性。对于 $s>0$，$T(s)$ 的值域是整个 X。设 $x\in X$ 和 $s>1$，存在 $y\in X$使得$T(s)y=x$。于是对于 $t<1$ 我们有

$$\|T(t)^{-1}x-x\|=\|T(t)^{-1}T(t)T(s-t)y-T(s)y\|$$
$$=\|T(s-t)y-T(s)y\|\to 0,\ \text{当}\ t\downarrow 0\text{时}.$$

因此 $S(t)$是强连续的，最后对于 $x\in D(A)$有

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)^{-1}x-x}{t}=\lim_{t\downarrow 0}T(t)\frac{T(t)^{-1}x-x}{t}$$

$$=\lim_{t\downarrow 0}\frac{x-T(t)x}{t}=-Ax.$$

因此$-A$是$T(t)^{-1}$ 的无穷小生成元。证明的其余部份是显然的。

定理 6.5 设$T(t)$是一个 C_0 有界算子半群。如果对某 $t_0>0$，$0\in\rho(T(t_0))$，则对一切 $t>0$，$0\in\rho(T(t))$，且$T(t)$能被嵌入到一个C_0群中。

证明 由于引理6.4只须证明对一切 $t>0$，$0\in\rho(T(t))$。因为 $0\in\rho(T(t_0))$，所以对一切 $n\geqslant 1$，$T(t_0)^n=T(nt_0)$ 是一对一的。设 $T(t)x=0$。选取 n 使得 $nt_0>t$ 有 $T(nt_0)=T(nt_0-t)\ T(t)x=0$，由此推出 $x=0$。因此对一切 $t>0$，$T(t)$是一对一的。其次我们证明对一切 $t>0$，$R(T(t))=X$。对于 $t\leqslant t_0$ 这是显然的，因为由半群性质，当 $t>t_0$ 时，

$R(T(t))\supset R(T(t_0))$。对于 $t>t_0$，命 $t=kt_0+t_1$，其中 $0\leqslant t_1<t_0$。则 $T(t)=T(t_0)^k T(t_1)$，因此仍有 $R(T(t))=X$。所以对一切 $t>0$，$T(t)$是一对一的且 $R(T(t))=X$，从而由闭图象定理对一切 $t>0$ 有 $0\in\rho(T(t))$。

定理 6.6 设 $T(t)$是一个C_0 有界算子半群，如果对某 $s_0>0$，$T(s_0)-I$ 是紧的，则对一切 $t>0$，$T(t)$是可逆的，并且 $T(t)$能被嵌入在一个 C_0 群中。

证明 由于定理6.5只须证明 $T(s_0)$ 是可逆的。如果 $T(s_0)$不是可逆的，则 $0\in\sigma(T(s_0))$。但由假设 $T(s_0)-I$ 是紧的，因此 0 是 $T(s_0)$的一个有限重的特征值。设 $x\neq 0$ 使得 $T(s_0)x=0$。令 $s_1=s_0/2$，则 $T(s_1)T(s_1)x=T(s_0)x=0$。因而0是 $T(s_1)$的特征值。通过归纳法我们可定义一个序列 $s_n\downarrow 0$，使得 0 是$T(s_n)$的特征值。设 $N(T(t))$是 $T(t)$的零空间，则显然 $N(T(s))\subset N(T(t))$ 对于 $s\leqslant t$ 成立。设 $Q_n=N(T(s_n))\bigcap\{x: \|x\|=1\}$，则 Q_n 是X的一个递减的非空闭子集序列。因为 $N(T(s_0))$是有限维的，Q_0 是紧的，由此推出

$\bigcap_{n=0}^{\infty}Q_n\neq\phi$。如果 $x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}Q_n$，则

$$\|T(s_n)x-x\|=\|x\|=1，对于一切 s_n 成立。\tag{6.6}$$

但当 $n\to\infty$时 $s_n\to 0$，因此(6.6)和$T(t)$的强连续性相矛盾。由此矛盾知 $T(s_0)$必是可逆的。证毕。

§1.7 Laplace 变换的反演

算子半群理论的一个基本问题是半群和其无穷小生成元

之间的关系。给定一个半群$T(t)$，可由定义得到它的无穷小生成元

$$Ax=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t},\quad x\in D(A)。$$

一个得到A，或者更确切地说A的预解式的不同的方法由注5.4给出。在那里，我们已指出：如果$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，则

$$R(\lambda;\ A)x=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T(t)xdt,\ 对于x\in X,\ Re\lambda>\omega成立。\tag{7.1}$$

出于对偏微分方程的应用考虑，我们更感兴趣由其无穷小生成元获得$T(t)$。其理由是对$x\in D(A)$，$T(t)x$是初值问题

$$\frac{du}{dt}-Au=0,\quad u(0)=x$$

的解。

本节和下一节将集中研究用其无穷小生成元表示$T(t)$的问题。完成这项工作的一种途径已经在定理5.5中给出。这里我们将采用一种不同的方法。如果$T(t)$满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，则$A$的预解式满足（7.1），即$A$的预解式是半群的Laplace变换。因此我们期待通过对A的预解式的逆Laplace变换得到半群$T(t)$。这就是本节所要作的。我们从某些准备知识开始。

引理 7.1 设B是一个有界线性算子。如果$\gamma>\|B\|$，则

$$e^{tB}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\lambda t}R(\lambda;\ B)d\lambda\tag{7.2}$$

(7.2)中的收敛是依一致算子拓扑的，并且在 t 的有界区间上一致的。

证明 设 $\gamma>\|B\|$，选取 r 使得 $\gamma>r>\|B\|$，设 C_r 是中心在原点半径为r的园。对于 $|\lambda|>r$ 我们有

$$R(\lambda;\ B)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{\lambda^{k+1}} \tag{7.3}$$

这里级数依一致算子拓扑对 $|\lambda|\geqslant r$ 一致收敛。用 $\frac{1}{2\pi i}e^{\lambda t}$ 乘(7.3)并在 C_r 上逐项积分得

$$e^{tB}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}e^{\lambda t}R(\lambda;\ B)d\lambda \tag{7.4}$$

这里我们用了恒等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\lambda^{-k-1}e^{\lambda t}d\lambda=\frac{t^k}{k!},\ \text{对于 } k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\text{成立。} \tag{7.5}$$

因为(7.4)的被积函数在 C_r 的外部是解析的，而且 $\|R(\lambda;\ B)\|\leqslant C|\lambda|^{-1}$，我们能通过Cauchy 定理移动积分路径从 C_r 到直线 $Re z=\gamma$。

引理 7.2 设 A 是满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$ 无穷的小生成元。又设 μ 是实数，$\mu>\omega\geqslant 0$，和

$$A_\mu=\mu AR(\mu;\ A)=\mu^2R(\mu;\ A)-\mu I \tag{7.6}$$

是 A 的Yosida 逼近，则对于 $Re\lambda>\omega\mu/(\mu-\omega)$ 我们有

$$R(\lambda;\ A_\mu)=(\lambda+\mu)^{-1}(\mu I-A)R\left(\frac{\mu\lambda}{\mu+\lambda};\ A\right) \tag{7.7}$$

和

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leqslant M\left(Re\lambda - \frac{\omega\mu}{\mu-\omega}\right)^{-1} \tag{7.8}$$

对于 $Re\lambda > \varepsilon + \omega\mu/(\mu-\omega)$ 和 $\mu > 2\omega$，存在仅依赖于 M 和 ε 的常数C，使得对一切 $x \in D(A)$

$$\|R(\lambda; A_\mu)x\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}(\|x\| + \|Ax\|). \tag{7.9}$$

证明 用 $\lambda I - A_\mu$ 从右或从左乘以(7.7)的右端，并利用 A 和其预解式的可交换性，可得到恒等式。因此证明了(7.7)。为了证明(7.8)我们注意 A_μ 是 e^{tA_μ} 的无穷小生成元，且由(5.25)得

$$\|e^{tA_\mu}\| \leqslant M \exp\left\{t\left(\frac{\omega\mu}{\mu-\omega}\right)\right\}.$$

由此用定理5.3推出(7.8)。最后对于 $Re\lambda > \varepsilon + \omega\mu/(\mu-\omega)$，由(7.8)知$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leqslant M\varepsilon^{-1}$。如果 $x \in D(A)$ 和 $\mu \geqslant 2\omega$，则

$$\|A_\mu x\| = \|\mu R(\mu; A)Ax\| \leqslant \frac{\mu M}{\mu-\omega}\|Ax\| \leqslant 2M\|Ax\|.$$

因此

$$\|R(\lambda; A_\mu)x\| = \left\|\frac{x}{\lambda} + \frac{R(\lambda; A_\mu)A_\mu x}{\lambda}\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(\|x\| + \frac{2M^2}{\varepsilon}\|Ax\|\right) \leqslant \frac{C}{|\lambda|}(\|x\| + \|Ax\|)$$

引理 7.3 设 A 如在引理7.2 中的，$\lambda = \gamma + i\eta$，这里

$\gamma > \omega + \varepsilon$ 是固定的，则对一切 $x \in X$，我们有

$$\lim_{\mu \to \infty} R(\lambda; A_\mu)x = R(\lambda; A)x \tag{7.10}$$

并且对每一 $y>0$，极限关于 $|\eta| \leqslant y$ 是一致的。

证明 命 $\nu = \mu\lambda/\mu + \lambda$，则由(7.7)对充分大的 μ 有

$$\begin{aligned}
&R(\lambda; A_\mu) - R(\lambda; A) \\
&\quad = (\mu+\lambda)^{-1}[(\mu I - A)R(\nu; A) - (\mu+\lambda)R(\lambda; A)] \\
&\quad = (\mu+\lambda)^{-1}(\mu I - A)R(\nu; A)[(\lambda I - A)(\mu I - A) \\
&\qquad - (\mu+\lambda)(\nu I - A)]R(\mu; A)R(\lambda; A) \\
&\quad = (\mu+\lambda)^{-1}(\mu I - A)R(\nu; A)A^2R(\mu; A)R(\lambda; A) \\
&\quad = (\mu+\lambda)^{-1}A^2R(\nu; A)R(\lambda; A).
\end{aligned}$$

对于 $\gamma > \omega + \varepsilon$，定理5.3推出 $\|R(\lambda; A)\| \leqslant M\varepsilon^{-1}$。给定 $y>0$，我们能找到 γ 和仅依赖于 y 的 μ_0，使得当 $\lambda = \gamma + i\eta$，$|\eta| \leqslant y$ 和 $\mu > \mu_0$ 时，有 $Re\,\mu\lambda/(\mu+\lambda) > \omega + \frac{\varepsilon}{2}$，于是对于 $\mu > \mu_0$，我们有 $\|R(\nu; A)\| \leqslant 2M\varepsilon^{-1}$。因此如果 $x \in D(A^2)$ 和 $\mu > \mu_0$，我们有

$$\|R(\lambda; A_\mu)x - R(\lambda; A)x\| \leqslant \frac{1}{|\mu+\lambda|}\|R(\nu; A)\| \cdot$$

$$\|R(\lambda; A)\| \cdot \|A^2x\| \leqslant \frac{1}{\mu}\frac{2M^2}{\varepsilon^2}\|A^2x\|$$

并且对于 $x \in D(A^2)$，(7.10)成立。因为 $D(A^2)$ 在 X 中稠密（定理 2.7），且因为根据引理 7.2，当 $\mu > \omega + \omega^2/\varepsilon$ 时，$\|R(\lambda; A_\mu)\|$ 对于 $Re\lambda > \omega + \varepsilon$ 是一致有界的，并且因为根据定理5.3 $\|R(\lambda; A)\|$ 亦如此，所以(7.10)对于 $x \in X$ 成立。

定理 7.4 设A是满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$的$C_0$半群$T(t)$的无穷小生成元。又设 $\gamma>\max\{0,\ \omega\}$，$x\in D(A)$，则

$$\int_0^t T(s)x\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)\frac{d\lambda}{\lambda}\tag{7.11}$$

并且右端的积分在t的有界区间上关于t一致收敛。

证明 设$\mu>0$固定，$\delta>\|A_\mu\|$。命

$$\rho_k(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-ik}^{\delta+ik}e^{\lambda s}R(\lambda;\ A_\mu)x\,d\lambda.\tag{7.12}$$

在(7.12)的两端从0到t积分并交换积分顺序得

$$\int_0^t\rho_k(s)ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-ik}^{\delta+ik}e^{\lambda t}R(\lambda;\ A_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-ik}^{\delta+ik}R(\lambda;\ A_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}.\tag{7.13}$$

让 $k\to\infty$，由引理7.1知 $\rho_k(s)\to e^{sA_\mu}x$ 在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上一致收敛，而且

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\delta-ik}^{\delta+ik}R(\lambda;\ A_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}=0.\tag{7.14}$$

这能通过 $\lambda^{-1}R(\lambda;\ A_\mu)x$ 在路径Γ_k上的积分推出，这里Γ_k由 $\Gamma_k^{(1)}=\{\gamma+i\eta:\ -k\leqslant\eta\leqslant k\}$ 和半园 $\Gamma_k^{(2)}=\left\{\gamma+ke^{i\varphi}:\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$ 组成。由 Cauchy 定理围绕Γ_k的积分是零。当$k\to\infty$时，由$\|R(\lambda;\ A_\mu)\|\leqslant C_\mu|\lambda|^{-1}$对于$|\lambda|\geqslant\delta$成立知沿着$\Gamma_k^{(2)}$的积分趋于零。因此当 $k\to\infty$ 时，在(7.13)中取极限

得

$$\int_0^t e^{sA_\mu} x ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda; A_\mu) x \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{7.15}$$

如果 $\gamma>\max\{\omega, 0\}$，由引理7.2显然存在 $\mu_0>0$，使得对于 $\mu\geqslant\mu_0$，$\{\lambda; Re\lambda\geqslant\gamma\}\subset\rho(A_\mu)$和对于 $x\in D(A)$，

$$\|R(\lambda; A_\mu)x\|\leqslant\frac{C}{|\lambda|}(\|x\|+\|Ax\|), \tag{7.16}$$

这里 C 仅依赖于 M 和 γ。因此对于 $\mu\geqslant\mu_0$ 我们能将(7.15)中的积分路径从 $Re\lambda=\delta$ 移到 $Re\lambda=\gamma$，得

$$\int_0^t e^{sA_\mu} x ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda; A_\mu)x\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{7.17}$$

由(7.16)，当$x\in D(A)$时积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma t}\|R(\gamma+i\eta; A_\mu)x\|\frac{d\eta}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \tag{7.18}$$

对于 $\mu\geqslant\mu_0$ 在 t 的有界区间上一致收敛。而对 $x\in D(A)$，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma t}\|R(\gamma+i\eta; A)x\|\frac{d\eta}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \tag{7.19}$$

亦在 t 的有界区间上一致收敛，因为对于 $Re\lambda>\omega$，我们有 $\|R(\lambda; A)x\|\leqslant C|\lambda|^{-1}(\|x\|+\|Ax\|)$。最后，应用定理5.5，当 $\mu\to\infty$时，(7.17) 的左边显然收敛到 $\int_0^t T(s)xds$。另一方面，由引理7.3，(7.18)和(7.19)，(7.17) 的右端收敛到(7.11)的右端。证毕。

推论 7.5 设A是满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$的 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元。又设 $\gamma>\max\{0, \omega\}$，$x\in D(A^2)$，则

$$T(t)x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda; A)xd\lambda, \tag{7.20}$$

并且对每一 $\delta>0$，积分关于 t 在 $t\in[\delta, 1/\delta]$上一致收敛。

证明 若 $x\in D(A^2)$，则 $Ax\in D(A)$，对于 Ax 应用定理7.4 得

$$\begin{aligned}T(t)x-x&=\int_0^t T(s)\ Ax\ ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda; A)Ax\ \frac{d\lambda}{\lambda}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\left(R(\lambda; A)x-\frac{x}{\lambda}\right)d\lambda.\end{aligned} \tag{7.21}$$

但

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}x\frac{d\lambda}{\lambda}=x,\ \text{对于}\ t>0\text{成立。} \tag{7.22}$$

且(7.22)关于 t 在 $t\in[\delta, 1/\delta]$上一致收敛，综合(7.21)和(7.22)得(7.20)。

推论 7.6 设 A 是满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$的$C_0$半群 $T(t)$的无穷小生成元。又设 $\gamma>\max\{0, \omega\}$，则对于一切 $x\in X$ 有

$$\int_0^t (t-s)\ T(s)xds=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda; A)x\frac{d\lambda}{\lambda^2} \tag{7.23}$$

并且收敛关于 t 在有界区间上是一致的。

证明 从 0 到 t 积分(7.11)我们得到

$$\int_0^t (t-s)\ T(s)x ds=\frac{1}{2\pi i}\int_0^t\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)x\frac{d\lambda}{\lambda}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}(e^{\lambda t}-1)\ R(\lambda;\ A)x\frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

但

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} R(\lambda;\ A)x\frac{d\lambda}{\lambda}=0,$$

因此对于 $x\in D(A)$，(7.23)成立。因为(7.23) 的右端在一致算子拓扑下收敛，所以定义了一个有界线性 算 子。又 因 $D(A)$在 X 中稠密，从而(7.23)对一切 $x\in X$ 成立。

我们以一个算子A 是C_0半群的无穷小生成元的一个重要的充分条件（但不必要）来结束本节。对比定理5.2和5.3的条件，以下定理 7.7的条件对于具体的例子往往是更容易验证的。

定理 7.7 设A 是X 中的一个稠定义的算子，并且满足以下条件：

(i) 对某$0<\delta<\frac{\pi}{2}$，$\rho(A)\supset\Sigma_\delta=\left\{\lambda:\ |\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}+\delta\right\}\cup\{0\}$，

(ii) 存在常数M，使得

$$\|R(\lambda;\ A)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda|}, \text{ 对于 } \lambda \in \Sigma_\delta, \ \lambda \neq 0 \text{成立。} \tag{7.24}$$

则 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元，且对于某常数C，$\|T(t)\| \leqslant C$。此外，

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)\,d\lambda, \tag{7.25}$$

这里 Γ 是 Σ_δ 中的一条从 $\infty e^{-i\theta}$ 到 $\infty e^{i\theta}$ 的光滑曲线，这里 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$。积分(7.25)对 $t>0$ 依一致算子拓扑收敛。

证明 命

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\mu t} R(\mu;\ A)\,d\mu. \tag{7.26}$$

从(7.24)易知对于 $t>0$，(7.26)的积分依一致算子拓扑收敛。此外，因为 $R(\lambda;\ A)$ 在 Σ_δ 中是解析的，我们可以移动(7.26)中的积分路径到 Γ_t，而不改变积分值，这里 $\Gamma_t = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$，且 $\Gamma_1 = \{re^{-i\theta}:\ t^{-1} \leqslant r < \infty\}$，$\Gamma_2 = \{t^{-1}e^{i\varphi}:\ -\theta \leqslant \varphi \leqslant \theta\}$和 $\Gamma_3 = \{re^{i\theta}:\ t^{-1} \leqslant r < \infty\}$。但

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3} e^{\mu t} R(\mu;\ A)\,d\mu\right\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{t^{-1}}^{\infty} e^{-rt\sin(\theta-\pi/2)} M r^{-1}\,dr$$

$$= \frac{M}{2\pi}\int_{\sin(\theta-\pi/2)}^{\infty} e^{-s}\frac{ds}{s} \leqslant C_1.$$

在 Γ_1 上的积分可类似估计，且在 Γ_2 上我们有

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} e^{\mu t} R(\mu;\ A)\,d\mu\right\| < \frac{M}{2\pi}\int_{-\theta}^{\theta} e^{\cos\varphi}\,d\varphi \leqslant C_2.$$

因此存在常数 C，使得$\|U(t)\|\leqslant C$ 对于$0<t<\infty$成立。下面我们指出对于 $\lambda>0$，有

$$R(\lambda;\ A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)dt. \tag{7.27}$$

为此我们以 $e^{-\lambda t}$ 乘(7.26)并从 0 到 T 积分，再用 **Fubini**定理和残数定理得

$$\int_0^T e^{-\lambda t}U(t)dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{\mu-\lambda}(e^{(\mu-\lambda)T}-1)R(\mu;\ A)d\mu$$

$$=R(\lambda;\ A)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{(\mu-\lambda)T}\frac{R(\mu;\ A)}{\mu-\lambda}d\mu \tag{7.28}$$

但

$$\left\|\int_\Gamma e^{T(\mu-\lambda)}\frac{R(\lambda;\ A)}{\mu-\lambda}d\mu\right\|\leqslant Me^{-T\lambda}\int_\Gamma\frac{|d\mu|}{|\mu|\cdot|\lambda-\mu|}$$

$\to 0$，当 $T\to\infty$ 时。

因此在(7.28) 中当 $T\to\infty$ 时取极限我们得到(7.27)。因为$\|U(t)\|\leqslant C$，我们能在(7.27)中的积分号下微分 $n-1$次得

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}R(\lambda;\ A)=(-1)^{n-1}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}U(t)dt.$$

因为由(5.22)

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}R(\lambda;\ A)=(-1)^{n-1}(n-1)!R(\lambda;\ A)^n$$

我们得到

$$\|R(\lambda;\ A)^n\| = \left\| \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}U(t)dt \right\|$$

$$\leqslant C\ \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}\ dt = \frac{C}{\lambda^n}. \tag{7.29}$$

因此由定理5.7，A 是一个满足$\|T(t)\|\leqslant C$ 的C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。剩下只须证明(7.25)．设 $x\in D(A^2)$，由推论7.5得

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)xd\lambda. \tag{7.30}$$

用(7.24)我们能在(7.30)中移动积分路径到 Γ，因此

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\ R(\lambda;\ A)xd\lambda \tag{7.31}$$

对一切 $x\in D(A^2)$ 成立。因为从证明的前一部分，积分 $\int_\Gamma e^{\lambda t}\ R(\lambda;\ A)d\lambda$ 依一致算子拓扑收敛和 $D(A^2)$在 X 中稠密（定理2.7），所以(7.31)对一切 $x\in X$成立。证毕。

§1.8 两个指数公式

正如我们已经提到的一个 C_0 半群 $T(t)$在某种意义下等于 e^{tA}，这里A 是 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 A 是一个有界线性算子则等式成立。在 A 是无界的情形，定理5.5给出了$T(t)$ "等于" e^{tA} 的 意 义的一种可能的解释。在本段中我

们再给两个这类结果。

定理 8.1 设 $T(t)$ 是 X 上的一个 C_0 半群。如果

$$A(h)x=\frac{T(h)x-x}{h}, \tag{8.1}$$

则对一切 $x\in X$，我们有

$$T(t)x=\lim_{h\downarrow 0} e^{tA(h)}x, \tag{8.2}$$

并且极限关于 t 在任何有界区间[0, T]上是一致的。

证明 设 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，其中 $\omega\geqslant 0$，A 是 $T(t)$ 的无穷小生成元。因为对每一 $h>0$，$A(h)$ 是有界的，所以 $e^{tA(h)}$ 是可定义的。而且由于 $A(h)$ 和 $T(t)$ 可交换，$e^{tA(h)}$ 和 $T(t)$ 亦如此。又

$$\|e^{tA(h)}\|\leqslant e^{-t/h}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{h}\right)^k\frac{\|T(hk)\|}{k!}\leqslant M\exp\left\{\frac{t}{h}(e^{\omega h}-1)\right\}.$$

因此对于 $0<h<1$ 有

$$\|e^{tA(h)}\|\leqslant Me^{t(e^{\omega}-1)}.$$

容易验证对于 $x\in D(A)$，$e^{(t-s)A(h)}T(s)x$ 关于 s 是可微的，而且

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}&(e^{(t-s)A(h)}T(s)x)\\&=-A(h)e^{(t-s)A(h)}T(s)x+e^{(t-s)A(h)}AT(s)x\\&=e^{(t-s)A(h)}T(s)(Ax-A(h)x).\end{aligned}$$

所以对于 $0<h\leqslant 1$ 和 $x\in D(A)$，我们有

$$\|T(t)x-e^{tA(h)}x\|=\left\|\int_0^t\frac{d}{ds}(e^{(t-s)A(h)}T(s)x)ds\right\|$$

$$\leqslant \int_0^t \|e^{(t-s)A(h)}\| \cdot \|T(s)\| \cdot \|Ax - A(h)x\| ds$$

$$\leqslant t M^2 e^{t(e^{\omega}+\omega-1)} \|Ax - A(h)x\|. \tag{8.3}$$

对于 $x \in D(A)$，在(8.3)中让 $h \downarrow 0$ 得(8.2)。因为$\|e^{tA(h)}\|$和$\|T(t)\|$都是在 t 的有限区间上一致有界和 $D(A)$ 在 X 中稠密，所以(8.2)对一切成立。

例 8.2 设 $X = BU(\boldsymbol{R})$，即 X 是$\boldsymbol{R}$ 上一致连续有界函数的空间。设

$$(T(t)f)(x) = f(x+t)，\text{其中} -\infty < x < \infty，\ 0 \leqslant t < \infty. \tag{8.4}$$

则 $T(t)$是X 上的一个C_0 收缩半群，其无穷小生成元A 具有定义域

$$D(A) = \{f:\ f \in X,\ f' \text{存在且} f' \in X\}$$

和在 $D(A)$上，$Af = f'$. 对于此半群有

$$(A(h)f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (\Delta_h f)(x)$$

易验证

$$(A(h)^k f)(x) = \frac{1}{h^k} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(x+mh)$$

$$= (\Delta_h^k f)(x).$$

应用定理8.1，我们得到

$$f(x+t) = \lim_{h \downarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\Delta_h^k f)(x). \tag{8.5}$$

在(8.5)中极限关于 x 在$\boldsymbol{R}$ 上和关于 t 在任何有限区间上一致存在。公式(8.5)是 Taylor 公式对于 f 仅仅是连续的情形的推广。注意如果 f 有 k 阶连续导数，则

$$\lim_{h\downarrow 0}(\Delta_h^k f)(x) = f^{(k)}(x).$$

定理 8.3（指数公式） 设 $T(t)$ 是 X 上的一个 C_0 半群，A 是 $T(t)$ 的无穷小生成元，则

$$T(t) = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n}x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ A\right)\right]^n x,\ \text{对于 } x\in X \text{ 成立。} \tag{8.6}$$

且极限关于 t 在任何有界区间上是一致的。

证明 假设$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$。我们已经知道对于 $Re\lambda>\omega$，$R(\lambda;\ A)$ 关于 λ 是解析的，且

$$R(\lambda;\ A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds,\ \text{对于 } x\in X \text{ 成立。} \tag{8.7}$$

在(8.7)中对 λ 微分 n 次，做代换 $s=\nu t$ 并取 $\lambda=\frac{n}{t}$ 我们求得

$$R\left(\frac{n}{t};\ A\right)^{(n)}x = (-1)^n t^{n+1}\int_0^\infty (\nu e^{-\nu})^n T(t\nu)x d\nu.$$

但

$$R(\lambda;\ A)^{(n)} = (-1)^n n! R(\lambda;\ A)^{n+1},$$

因此

$$\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ A\right)\right]^{n+1}x=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty(\nu e^{-\nu})^nT(t\nu)x\,d\nu$$

注意

$$\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty(\nu e^{-\nu})^n d\nu=1,$$

我们得到

$$\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ A\right)\right]^{n+1}x-T(t)x$$

$$=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty(\nu e^{-\nu})^n[T(\nu t)x-T(t)x]d\nu. \tag{8.8}$$

给定 $\varepsilon>0$，我们选取$0<a<1<b<\infty$ 使得 $t\in[0,\ t_0]$时

$$\|T(t\nu)x-T(t)x\|<\varepsilon \quad \text{对于}\ a\leqslant\nu\leqslant b\ \text{成立。}$$

然后我们将(8.8) 右端的积分分成在区间$[0,\ a]$，$[a,\ b]$和$[b,\ \infty]$上的三个积分 I_1，I_2，I_3。我们有

$$\|I_1\|\leqslant\frac{n^{n+1}}{n!}(ae^{-a})^n\int_0^a\|T(\nu t)x-T(t)x\|d\nu,$$

$$\|I_2\|\leqslant\varepsilon\frac{n^{n+1}}{n!}\int_a^b(\nu e^{-\nu})^n d\nu<\varepsilon,$$

$$\|I_3\|=\left\|\frac{n^{n+1}}{n!}\int_b^\infty(\nu e^{-\nu})^n(T(t\nu)x-T(t)x)d\nu\right\|.$$

这里我们利用了 $\nu e^{-\nu}\geqslant0$在 $0\leqslant\nu\leqslant1$ 上单调非减和在 $\nu\geqslant1$ 上非增的事实。而且因为当$\nu\neq1$ 时 $\nu e^{-\nu}<e^{-1}$，所以当$n\to\infty$ 时，$\|I_1\|\to0$ 关于 $t\in[0,\ t_0]$是一致的。在 I_3 中取 $n>\omega t$，

我们看到在 I_3 的估计中的积分收敛，而且当 $n\to\infty$ 时，$\|I_3\|\to 0$ 关于 $t\in[0, t_0]$ 是一致的。因此

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\|\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ A\right)\right]^{n+1}x-T(t)x\right\|\leqslant\varepsilon$$

和因 $\varepsilon>0$ 是任意的我们有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ A\right)\right]^{n+1}x=T(t)x.$$

但由引理3.2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ A\right)x=x.$$

所以(8.6)成立。

注 8.4 在第 7 节中我们已经看到 $T(t)$ 能通过对无穷小生成元的预解式做逆 Laplace 变换而得到。定理8.3也给我们提供了一个 Laplace 变换的反演，这与Post-Widder实反演公式，即

$$f(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\hat{f}^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right),$$

密切相关，其中 $\hat{f}$ 是 f 的 Laplace 变换。

注 8.5 公式(8.6)有另一种有趣的解释。设A 是C_0 半群$T(t)$的无穷小生成元。如果我们想解初值问题

$$\frac{du}{dt}=Au,\quad u(0)=x. \tag{8.9}$$

一种标准的做法是以下式

$$\frac{u_n\left(\frac{jt}{n}\right)-u_n\left(\frac{(j-1)t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}=Au_n\left(\frac{jt}{n}\right),\quad u_n(0)=x \tag{8.10}$$

代替(8.9)。这是(8.9)的一个隐式差分逼近。方程(8.10)能具体地解出，并且其解由

$$u_n(t)=\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x$$

给出。$u_n(t)$ 是 (8.9) 的解在 t 处的逼近。定理8.3 指出当 $n\to\infty$时，$u_n(t)\to T(t)x$。从我们已知的结果不难验证：如果 $x\in D(A)$，则 $T(t)x$ 是 (8.9) 的唯一解。因此差分方程(8.10) 的解收敛到微分方程(8.9) 的解。如果 $x\notin D(A)$，则 (8.9) 完全不必有解。虽然如此，在这种情形差分方程(8.10)的解仍然收敛到$T(t)x$，且 $T(t)x$ 将看做是(8.10)的一个广义解。

§1.9 伪预解式

我们已经看到 X 上的 C_0 半群的无穷小生成元的特征通常是用A 的预解式的条件来刻划的（如见定理3.1和5.5）。这不是一种异常的情形。事实上，在 X上无界线性算子的研究中处理由有界线性算子组成的它们的预解式族往往是更方便的。本节将根据其主要性质研究一个算子A 的预解式族的特征。

设 A 是 X 上闭的和稠定义的算子，设 $R(\lambda;A)=$

$(\lambda I-A)^{-1}$ 是预解式。如果 μ 和 λ 是在 A 的预解集 $\rho(A)$ 中，则我们有预解恒等式

$$R(\lambda;\ A)-R(\mu;\ A)=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ A)R(\mu;\ A). \tag{9.1}$$

这个恒等式推动我们引入以下定义。

定义 9.1 设Δ 是复平面的一个子集。一个X 上的有界线性算子族 $J(\lambda)$，$\lambda\in\Delta$，称为 Δ 上的一个伪预解式，若

$$J(\lambda)-J(\mu)=(\mu-\lambda)J(\lambda)J(\mu)\quad 对于\ \lambda,\ \mu\in\Delta\ 成立. \tag{9.2}$$

我们在本节的主要目的是确定存在一个稠定义的闭线性算子A，使得 $J(\lambda)$是它的预解式族的条件。

引理 9.2 设Δ 是**C**（复平面）的一个子集。如果 $J(\lambda)$ 是 Δ 的一个伪预解式，则 $J(\lambda)J(\mu)=J(\mu)J(\lambda)$。零空间 $N(J(\lambda))$和值域 $R(J(\lambda))$不依赖于 $\lambda\in\Delta$。且 $N(J(\lambda))$ 是 X 的一个闭子空间。

证明 由(9.2)，显然 $J(\lambda)$和 $J(\mu)$对于 λ，$\mu\in\Delta$可换。又若改写(9.2)成以下形式

$$J(\lambda)=J(\mu)[I+(\mu-\lambda)J(\lambda)],$$

$R(J(\lambda))\supset R(J(\mu))$ 就显然了，并且由于对称性有等式成立。类似地 $N(J(\lambda))=N(J(\mu))$，而 $N(J(\lambda))$的闭性是明显的。

定理 9.3 设 Δ 是 **C** 的一个子集，$J(\lambda)$是 Δ 上的一个伪预解式。则 $J(\lambda)$ 是唯一的稠定义的闭线性算子 A 的预解式当且仅当 $N(J(\lambda))=\{0\}$，且 $R(J(\lambda))$在 X 中稠密。

证明 显然如果 $J(\lambda)$是一个稠定义的闭算子 A 的预解式，我们有 $N(J(\lambda))=\{0\}$和 $R(J(\lambda))=D(A)$在X中稠密。现设 $N(J(\lambda))=\{0\}$和 $R(J(\lambda))$在X 中稠密。由 $N(J(\lambda))=$

$\{0\}$知 $J(\lambda)$是一对一的，设 $\lambda_0\in\Delta$，且令

$$A=\lambda_0 I-J(\lambda_0)^{-1}. \tag{9.3}$$

则算子A 显然是线性的，闭的和 $D(A)=R(J(\lambda_0))$在 X 中稠密。从(9.3)式明显地有

$$(\lambda_0 I-A)J(\lambda_0)=J(\lambda_0)(\lambda_0 I-A)=I, \tag{9.4}$$

因此 $J(\lambda_0)=R(\lambda_0;\ A)$。如果 $\lambda\in\Delta$，则

$$\begin{aligned}(\lambda I-A)J(\lambda)&=((\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-A))J(\lambda)\\&=((\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-A))J(\lambda_0)[I-(\lambda-\lambda_0)J(\lambda)]\\&=I+(\lambda-\lambda_0)[J(\lambda_0)-J(\lambda)-(\lambda-\lambda_0)J(\lambda)J(\lambda_0)]\\&=I.\end{aligned}$$

类似地$J(\lambda)(\lambda I-A)=I$。因此对一切 $\lambda\in\Delta$有$J(\lambda)=R(\lambda;\ A)$。特别地，$A$ 不依赖于 λ_0 且由 $J(\lambda)$唯一确定。

我们以伪预解式是预解式的两个有用的充分条件来结束本节。

定理 9.4 设Δ是 $\mathbf{C}$ 的一个无界子集，$J(\lambda)$是Δ 上的一个伪预解式。如果 $R(J(\lambda))$在X 中稠密且存在序列 $\lambda_n\in\Delta$，使得$|\lambda_n|\to\infty$和对某常数 M 使得

$$\|\lambda_n J(\lambda_n)\|\leqslant M, \tag{9.5}$$

则 $J(\lambda)$是唯一的稠定义的闭线性算子 A 的预解式。

证明 由(9.5)当 $n\to\infty$时，$\|J(\lambda_n)\|\to 0$。设 $\mu\in\Delta$，由(9.2)我们推出

$$\|(\lambda_n J(\lambda_n)-I)J(\mu)\|\to 0,\ \text{当}n\to\infty\text{时}. \tag{9.6}$$

因此如果 X 在 $J(\mu)$的值域中，我们有

$$\lambda_n J(\lambda_n)x\to x,\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}. \tag{9.7}$$

因为 $R(J(\lambda))$在 X 中稠密和 $\lambda_n J(\lambda_n)$是一致有界的，我们有(9.7)对一切 $x\in X$成立。如果 $x\in N(J(\lambda))$，则 $\lambda_n J(\lambda_n)x=0$，

且由(9.7)推出 $x=0$。因此 $N(J(\lambda))=\{0\}$和根据定理9.3，$J(\lambda)$是一个稠定义的闭算子 A 的预解式。

推论 9.5 设 Δ 是 $\mathbf{C}$ 的一个无界子集，$J(\lambda)$是 Δ 上的一个伪预解式。如果存在序列 $\lambda_n\in\Delta$ 使得当 $n\to\infty$ 时有 $|\lambda_n|\to\infty$，且

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n J(\lambda_n)x=x,\ \text{对一切}x\in X\text{成立。}\tag{9.8}$$

则 $J(\lambda)$是唯一的稠定义的闭算子 A 的预解式。

证明 由一致有界性定理和(9.8)有(9.5)成立。由引理9.2我们得知$R(J(\lambda))$不依赖于 $\lambda\in\Delta$，因此(9.8)推出$R(J(\lambda))$在 X 中稠密。于是定理9.4的条件成立和 $J(\lambda)$是一个算子 A 的预解式。

§1.10 对偶半群

我们先给出一些准备知识。设 X 是 Banach 空间，有对偶 X^*。我们用$\langle x^*, x\rangle$或$\langle x, x^*\rangle$ 表示 $x^*\in X^*$ 在 $x\in X$ 的值。设 S 是X 中一个具有稠密定义域 $D(S)$的线性算子。回想一下，S 的伴随 S^*是一个从 $D(S^*)\subset X^*$到X^* 的线性算子。其定义如下：$D(S^*)$是所有 $x^*\in X^*$使得存在 $y^*\in X^*$满足下式的集合

$$\langle x^*, Sx\rangle=\langle y^*, x\rangle,\ \text{对一切}\ x\in D(S)\text{成立。}\tag{10.1}$$

如果 $x^*\in D(S^*)$，则 $y^*=S^*x^*$，这里 y^*是X^*中满足(10.1)的元素，请注意，因为 $D(S)$在 X 中稠密，所以至多存在一个 $y^*\in X^*$使得(10.1)成立。

引理 10.1 设 S 是 X 上的一个有界算子，则 S^*是 X^*的一个有界算子，且$\|S\|=\|S^*\|$。

证明 对于每一$x^*\in X^*$，$\langle x^*, Sx\rangle$是 X 上的一个有界线性泛函，因此它确定了唯一的一个元素 $y^*\in X^*$，使得 $\langle y^*, x\rangle=\langle x^*, Sx\rangle$。因此 $D(S^*)=X^*$。此外，

$$\|S^*\|=\sup_{\|x^*\|\leq 1}\|S^*x^*\|=\sup_{\|x^*\|\leq 1}\sup_{\|x\|\leq 1}|\langle S^*x^*, x\rangle|$$
$$=\sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|x^*\|\leq 1}|\langle x^*, Sx\rangle|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|Sx\|=\|S\|.$$

引理 10.2 设A是X中的一个线性稠定义的算子。如果$\lambda\in\rho(A)$，则 $\lambda\in\rho(A^*)$，且

$$R(\lambda; A^*)=R(\lambda; A)^*. \tag{10.2}$$

证明 由伴随的定义知$(\lambda I-A)^*=\lambda I^*-A^*$，这里 I^* 是 X^*中的恒等算子。因为$R(\lambda; A)$是一个有界算子，所以由引理10.1，$R(\lambda; A)^*$是 X^*上的一个有界算子。我们将证明 $R(\lambda; A^*)$ 存在并且等于 $R(\lambda, A)^*$。首先我们指出 λI^*-A^* 是一对一的。如果对某 $x^*\neq 0$，$(\lambda I^*-A^*)x^*=0$，则对一切 $x\in D(A)$，$0=\langle(\lambda I^*-A^*)x^*, x\rangle=\langle(\lambda I-A)x, x^*\rangle$。但因为 $\lambda\in\rho(A)$，所以 $R(\lambda I-A)=X$。因此 $x^*=0$ 和 λI^*-A^* 是一对一的。现设 $x\in X$，$x^*\in D(A^*)$，则

$$\langle x^*, x\rangle=\langle x^*, (\lambda I-A)R(\lambda; A)x\rangle$$
$$=\langle(\lambda I^*-A^*)x^*, R(\lambda; A)x\rangle,$$

因此

$$R(\lambda; A^*)(\lambda I^*-A^*)x^*=x^*,\ 对一切\ x^*\in D(A^*)成立。 \tag{10.3}$$

另一方面如果 $x^*\in X^*$和 $x\in D(A)$，则

$$\langle x^*, x\rangle=\langle x^*, R(\lambda; A)(\lambda I-A)x\rangle$$
$$=\langle R(\lambda; A)^*x^*, (\lambda I-A)x\rangle,$$

由此推出

$$(\lambda I^*-A^*)R(\lambda; A)^*x^*=x^*, \text{ 对一切} x^*\in X^* \text{成立。} \tag{10.4}$$

由(10.3)和(10.4)知 $\lambda\in\rho(A^*)$。所以$R(\lambda; A^*)=R(\lambda; A)^*$。

设 $T(t)$，$t\geqslant 0$ 是 X 上的一个 C_0 半群。对于 $t>0$ 设 $T(t)^*$ 是 $T(t)$ 的伴随算子。显然，由伴随算子的定义，X^*上的有界算子族 $T(t)^*$对于 $t\geqslant 0$ 满足半群性质。因此这个族称为 $T(t)$的伴随半群。然而伴随半群不必是 X^*上的一个C_0 半群。因为映象 $T(t)\to T(t)^*$不一定保持 $T(t)$的强连续性。在我们叙述和证明本节的主要结果，即关于半群$T(t)$，$T(t)^*$ 及其无穷小生成元之间的关系之前，我们需要另一个定义。

定义 10.3 设 S 是 X 中的一个线性算子，设Y 是X的一个子空间，由$D(\widetilde{S})=\{x\in D(S)\cap Y: Sx\in Y\}$和 $\widetilde{S}x=Sx$，$x\in D(\widetilde{S})$ 定义的算子 $\widetilde{S}$ 称为S在Y中的部分。

定理 10.4 设 $T(t)$是 X 上的一个 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。又设 $T(t)^*$是其伴随半群。如果 A^*是A的伴随和 Y^*是 $D(A^*)$ 在 X^* 中的闭包，则 $T(t)^*$在 Y^* 上的限制 $T(t)^+$是 Y^*上的一个 C_0 半群。$T(t)^+$ 的无穷小生成元 A^+是 A^* 在 Y^*中的部分。

证明 因为 A 是 $T(t)$的无穷小生成元，存在常数 ω 和 M 使得对一切大于 ω 的实数λ，有 $\lambda\in\rho(A)$和

$$\|R(\lambda;\ A)^n\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\omega)^n},\ \text{对于}\ n=1,\ 2,\ \cdots\text{成立。} \tag{10.5}$$

这是定理5.3的一个推论。由引理10.1和引理10.2，当 $\lambda>\omega$ 时，有 $\lambda\in\rho(A^*)$ 和

$$\|R(\lambda;\ A^*)^n\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\omega)^n},\ \text{对于}\ n=1,\ 2,\ \cdots\text{成立。} \tag{10.6}$$

设 $J(\lambda)$ 是 $R(\lambda;\ A^*)$ 在 Y^* 中的限制，那么显然，我们有

$$\|J(\lambda)^n\|\leqslant\frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \tag{10.7}$$

$$J(\lambda)-J(\mu)=(\mu-\lambda)J(\lambda)J(\mu)\quad\text{对于}\ \lambda,\ \mu>\omega\text{成立。} \tag{10.8}$$

且由引理3.2

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda J(\lambda)x^*=x^*,\ \text{对一切}\ x^*\in Y^*\text{成立。} \tag{10.9}$$

由(10.8)，(10.9)和推论9.5知 $J(\lambda)$ 是 Y^* 中一个闭的稠定义的算子 A^+ 的预解式。从(10.9)和定理6.3得知 A^+ 是 Y^* 上一个 C_0 半群 $T(t)^+$ 的无穷小生成元。对于 $x\in X$ 和 $x^*\in Y^*$，由定义我们有

$$\left\langle x^*,\ \left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x\right\rangle=\left\langle\left(I-\frac{t}{n}A^+\right)^{-n}x^*,\ x\right\rangle$$

$$\text{对于}\ n=1,\ 2,\ \cdots\text{成立。} \tag{10.10}$$

在(10.10)中让 $n\to\infty$ 并应用定理8.3我们得到

$$\langle x^*,\ T(t)x\rangle=\langle T(t)^+x^*,\ x\rangle. \tag{10.11}$$

因此对于 $x^*\in Y^*$，$T(t)^*x^*=T(t)^+x^*$ 和 $T(t)^+$是 $T(t)^*$在 Y^*上的限制。

为了结束证明我们必须指出 A^+是 A^*在 Y^* 中的部分。设$x^*\in D(A^*)$ 使得 $x^*\in Y^*$和 $A^*x^*\in Y^*$，则 $(\lambda I^*-A^*)x^*\in Y^*$和

$$(\lambda I^*-A^+)^{-1}(\lambda I^*-A^*)x^*=x^*. \tag{10.12}$$

因此 $x^*\in D(A^+)$。以(λI^*-A^+) 作用在(10.12)的两边得到 $(\lambda I^*-A^*)x^*=(\lambda I^*-A^+)x^*$。因此 $A^+x^*=A^*x^*$。故 A^+是 A^* 在 Y^*中的部分。

在X是自反 Banach 空间的特殊情形我们有

引理 10.5 设 S 是 X 中一个稠定的闭算子。则$D(S^*)$在X 中稠密。

证明 如果 $D(S^*)$不在 X^*中稠密，则存在元素 $x_0\in X$ 使得 $x_0\neq 0$ 和$\langle x^*, x_0\rangle=0$，对一切 $x^*\in D(S^*)$成立。因为S是闭的，所以其图象在 $X\times X$ 中是闭的，且不包含$(0, x_0)$。由 Hahn-Banach 定理存在 x_1^*，$x_2^*\in X^*$使得$\langle x_1^*, x\rangle-\langle x_2^*, Sx\rangle=0$，对一切$x\in D(S)$成立，且$\langle x_1^*, 0\rangle-\langle x_2^*, x_0\rangle\neq 0$。由第二个方程知$x_2^*\neq 0$ 和 $\langle x_2^*, x_0\rangle\neq 0$。但由第一个方程知$x_2^*\in D(S^*)$，这推出 $\langle x_2^*, x_0\rangle=0$，此为矛盾。故 $\overline{D(S^*)}=X^*$。

作为定理10.4和引理10.5的一个推论我们有

推理 10.6 设X是一个自反 Banach 空间，$T(t)$是 X 上一个C_0半群具无穷小生成元A，则 $T(t)$的伴随半群 $T(t)^*$是 X^*上的一个C_0 半群，其无穷小生成元是A 的伴随A^*。

我们以 Hilbert 空间中的一个结果来结束本节。

定义 10.7 设H 是一个具内积 (,) 的 Hilbert 空间。

一个 H 中的算子 A 称为对称的，如果 $\overline{D(A)}=H$ 和 $A\subset A^*$，即对一切 $x, y\in D(A)$，$(Ax, y)=(x, Ay)$。A 称为自伴的，如果 $A=A^*$。一个 H 上的有界算子 U 称为酉的，如果 $U^*=U^{-1}$。

让我们回忆一下，任何伴随算子是闭的，且 U 是酉的当且仅当 $R(U)=H$ 且 U 是等距的。这两个事实容易证明。留着读者练习。

定理 10.8（Stone） A 是 Hilbert 空间 H 上的 C_0 酉算子群的无穷小生成元当且仅当 iA 是自伴的。

证明 设 A 是一个 C_0 酉算子群 $U(t)$ 的无穷小生成元，则 A 是稠定义的（推论2.5）和对 $x\in D(A)$

$$-A=\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(U(-t)x-x)=\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(U(t)^* x-x)=A^*x.$$

这推出 $A=-A^*$，因此 $iA=(iA)^*$，即 iA 是自伴的。

如果 iA 是自伴的，则 A 是稠定义的，且 $A=-A^*$。因此对一切 $x\in D(A)$，我们有

$$(Ax, x)=(x, A^*x)=-(x, Ax)=-\overline{(Ax, x)},$$

因此对一切 $x\in D(A)$ 有 $Re(Ax, x)=0$，即 A 是耗散的。因为 $A=-A^*$，所以对一切 $x\in D(A^*)=D(A)$ 也有 $Re(A^*x, x)=0$，即 A^* 也是耗散的。由前述定理的注记知 A 和 A^* 是闭的。且因为 $A^{**}=A$，由推论4.4，A 和 $A^*=-A$ 都是 H 上 C_0 收缩半群的无穷小生成元。若 $U_+(t)$ 和 $U_-(t)$ 分别是由 A 和 A^* 生成的半群，我们定义

$$U(t)=\begin{cases} U_+(t), & \text{当 } t\geqslant 0 \text{ 时}, \\ U_-(t), & \text{当 } t\leqslant 0 \text{ 时}. \end{cases} \tag{10.13}$$

则 $U(t)$ 是一个群（见1.6节），且由于 $U(t)^{-1}=U(-t)$，$\|U(t)\|\leqslant 1$，$\|U(-t)\|\leqslant 1$ 知 $R(U(t))=X$ 和 $U(t)$ 对每一 t 是等距的。因此正如所期待的，$U(t)$ 是 H 上的一个酉算子群。

第二章　谱性质和正则性

§2.1 弱强等价性

设 $T(t)$ 是 Banach 空间上的一个 C_0 有界线性算子半群。设A 是如定义1.1.1中定义的 $T(t)$的无穷小生成元。现在我们考虑算子

$$\tilde{A}x = \omega - \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h}, \tag{1.1}$$

这里 $\omega-\lim$ 表示X 中的弱极限。$\tilde{A}$的定义域是所有使得在(1.1)的右端弱极限存在的 $x\in X$ 的集。因为极限的存在蕴涵弱极限的存在，所以显然 $\tilde{A}$ 是 A 的扩张。由以下定理1.3知这种扩张并不是真的。在这个定理的证明中我们将需要以下实变量的结果。

引理 1.1 设$[0, b)$上的实值函数 ω 是连续的和右可微的。设$D^+\omega$ 是 ω 的右导数。如果 $\omega(a)=0$ 和 $D^+\omega(t)\leqslant 0$ 在$[a, b)$上成立，则在$[a, b)$ 上 $\omega(t)\leqslant 0$.

证明 首先设 $D^+\omega(t)<0$. 如果结果不真，则存在 $t_1\in(a, b)$ 使得 $\omega(t_1)>0$. 命 $t_0=\inf\{t: \omega(t)>0\}$. 由 ω 的连续性，$\omega(t_0)=0$，且由 t_0 的定义有序列$\{t_n\}$使得 $t_n\downarrow t_0$

和 $\omega(t_n)>0$。因此

$$D^+\omega(t_0)=\lim_{t_n\downarrow t_0}\frac{\omega(t_n)-\omega(t_0)}{t_n-t_0}\geqslant 0.$$

这和我们的假设 $D^+\omega(t)<0$ 矛盾，因此在$[a, b)$上有$\omega(t)\leqslant 0$。

让我们回到一般情形 $D^+\omega(t)\leqslant 0$。对每一 $\varepsilon>0$ 我们考虑函数 $\omega_\varepsilon(t)=\omega(t)-\varepsilon(t-a)$，对于 $\omega_\varepsilon(t)$我们有 $\omega_\varepsilon(a)=0$ 和 $D^+\omega_\varepsilon\leqslant-\varepsilon<0$。因此由前述证明在$[a, b)$上有 $\omega_\varepsilon(t)\leqslant 0$，即 $\omega(t)\leqslant\varepsilon(t-a)$。因为 $\varepsilon>0$是任意的，所以在$[a, b)$上有$\omega(t)\leqslant 0$。

推论 1.2 设 φ 在 $[a, b)$ 上是连续的和右可微的。如果$D^+\varphi$ 在$[a, b)$上是连续的，则 φ 在$[a, b)$ 上是连续可微的。

证明 设 $\psi=D^+\varphi$ 且定义 $\chi(t)=\varphi(a)+\int_a^t\psi(\tau)d\tau$。那么函数$\chi$在$[a, b)$上显然是连续的。设 $\omega(t)=\chi(t)-\varphi(t)$，则 $\omega(a)=0$ 和在$[a, b)$上有 $D^+\omega(t)=0$。由引理 1.1知在$[a, b)$ 上有 $\omega(t)\leqslant 0$。类似地$-\omega(t)$ 也满足引理 1.1的条件，因此 $\omega(t)\geqslant 0$。所以在$[a, b)$上有 $\omega(t)=0$。即$\varphi(t)=\chi(t)$。证毕。

定理 1.3 设 $T(t)$是一个C_0 有界算子半群，A 是其无穷小生成元。如果$\widetilde{A}$是由(1.1)所定义的算子，则 $\widetilde{A}=A$。

证明 由 A 和 $\widetilde{A}$ 的定义显然$\widetilde{A}\supset A$。设 $x\in D(\widetilde{A})$。因为有界线性算子是弱连续的，我们有

$$\omega-\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h}=\omega-\lim_{h\downarrow 0}T(t)\left(\frac{T(h)x-x}{h}\right)$$

$$=T(t)\left(\omega-\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(h)x-x}{h}\right)=T(t)\tilde{A}x. \tag{1.2}$$

因此如果 $x\in D(\tilde{A})$和 $x^*\in X^*$，则

$$D^+\langle x^*,\ T(t)x\rangle=\langle x^*,\ T(t)\tilde{A}x\rangle \tag{1.3}$$

即 $\langle x^*,\ T(t)x\rangle$的右导数在 $[0,\ \infty)$ 上存在且等于 $\langle x^*,\ T(t)\tilde{A}x\rangle$。但 $t\to\langle x^*,\ T(t)\tilde{A}x\rangle$ 关于 t 连续，因此由推论1.2$\langle x^*,\ T(t)x\rangle$ 在$[0,\ \infty)$上连续可微，且其导数为$\langle x^*,\ T(t)\tilde{A}x\rangle$。而且

$$\langle x^*,\ T(t)x-x\rangle=\langle x^*,\ T(t)x\rangle-\langle x^*,\ x\rangle$$

$$=\int_0^t\langle x^*,\ T(s)\tilde{A}x\rangle ds=\left\langle x^*,\ \int_0^t T(s)\tilde{A}x ds\right\rangle. \tag{1.4}$$

因为(1.4)对一切 $x^*\in X^*$成立，所以由 **Hahn-Banach** 定理

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)\tilde{A}x ds. \tag{1.5}$$

用 $t>0$除(1.5)并让 $t\downarrow 0$得

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x-x}{t}=\tilde{A}x. \tag{1.6}$$

因此 $x\in D(A)$和 $Ax=\tilde{A}x$。于是 $A\supset\tilde{A}$，故 $A=\tilde{A}$。

另一个关于弱蕴涵强的结果是以下定理。在这里我们只叙述而不证明。

定理 1.4 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 X 上的一个有界线性算子半群（定义1.1.1）满足

$$\omega-\lim_{t\downarrow 0} T(t)x=x, \text{ 对一切 } x\in X \text{ 成立}, \tag{1.7}$$

则 $T(t)$ 是一个 C_0 有界线性算子半群。

§2.2 谱映象定理

设 $T(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。在本节我们将研究 A 的谱和每一个算子 $T(t)$ $(t\geqslant 0)$ 的谱之间的关系。从纯形式的观点人们期望有关系式 $\sigma(T(t))=\exp\{t\sigma(A)\}$。然而正如以下例子所表明的，这一般是不成立的。

例 2.1 设 X 是 $[0, 1]$ 上连续且在 $x=1$ 等于零的函数的 Banach 空间，具有上确界范数。定义

$$(T(t)f)(x)=\begin{cases} f(x+t), & \text{如果 } x+t\leqslant 1, \\ 0, & \text{如果 } x+t>1. \end{cases}$$

显然 $T(t)$ 是 X 上的 C_0 收缩半群，其无穷小生成元 A 是由

$$D(A)=\{f: f\in C'([0, 1])\cap X, f'\in X\}$$

和对于 $f\in D(A)$

$$Af=f'$$

给出。容易验证对每一 $\lambda\in\mathbf{C}$ 和 $g\in X$，方程 $\lambda f-f'=g$ 有

唯一的解 $f\in X$ 如下：

$$f(t)=\int_t^1 e^{\lambda(t-s)}g(s)ds.$$

因此 $\sigma(A)=\phi$。另一方面，因为对每一 $t\geqslant 0$，$T(t)$是一个有界线性算子，所以对所有 $t\geqslant 0$，$\sigma(T(t))\neq\phi$。因此对任何 $t\geqslant 0$，关系式 $\sigma(T(t))=\exp\{t\sigma(A)\}$不成立。

引理 2.2 设$T(t)$是 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。如果

$$B_\lambda(t)x=\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds. \tag{2.1}$$

则

$$(\lambda I-A)B_\lambda(t)x=e^{\lambda t}x-T(t)x,\ \text{对一切}\ x\in X\ \text{成立。} \tag{2.2}$$

和

$$B_\lambda(t)(\lambda I-A)x=e^{\lambda t}x-T(t)x,\ \text{对一切}\ x\in D(A)\text{成立。} \tag{2.3}$$

证明 对每一固定的 λ 和 t，由(2.1)定义的 $B_\lambda(t)$是X上的有界线性算子。此外对每一 $x\in X$ 有

$$\frac{T(h)-I}{h}B_\lambda(t)x=\frac{e^{\lambda h}-I}{h}\int_h^t e^{\lambda(t-s)}T(s)ds$$
$$+\frac{e^{\lambda h}}{h}\int_t^{t+h} e^{\lambda(t-s)}T(s)xds-\frac{1}{h}\int_0^h e^{\lambda(t-s)}T(s)xds. \tag{2.4}$$

当 $h\downarrow 0$ 时，(2.4)的右端收敛到 $\lambda B_\lambda(t)x+T(t)x-e^{\lambda t}x$.

因此 $B_\lambda(t)x\in D(A)$和

$$AB_\lambda(t)x=\lambda B_\lambda(t)x+T(t)x-e^{\lambda t}x. \tag{2.5}$$

由此推出(2.2)。显然，从 $B_\lambda(t)$的定义，对于 $x\in D(A)$，$AB_\lambda(t)x=B_\lambda(t)Ax$。所以(2.3)成立。

定理 2.3 设 $T(t)$是C_0 半群，A 是其无穷小生成元。则

$$\sigma(T(t))\supset e^{t\sigma(A)}, \text{对于 } t\geqslant 0 \text{成立.} \tag{2.6}$$

证明 设 $e^{\lambda t}\in\rho(T(t))$，$Q=(e^{\lambda t}I-T(t))^{-1}$。显然，由(2.1)定义的算子 $B_\lambda(t)$ 和 Q 可换。从(2.2)和(2.3)我们导出

$$(\lambda I-A)B_\lambda(t)Qx=x, \text{对一切 } x\in X \text{ 成立。} \tag{2.7}$$

和

$$QB_\lambda(t)(\lambda I-A)x=x, \text{对一切 } x\in D(A) \text{成立.} \tag{2.8}$$

因为 $B_\lambda(t)$和 Q 可换，我们亦有

$$B_\lambda(t)Q(\lambda I-A)x=x, \text{对一切 } x\in D(A) \text{成立.} \tag{2.9}$$

因此 $\lambda\in\rho(A)$，$B_\lambda(t)Q=(\lambda I-A)^{-1}=R(\lambda;A)$，且 $\rho(T(t))\subset\exp\{t\rho(A)\}$，由此推出(2.6)。

让我们回忆一下，A 的谱由三个互不相交的部分组成：点谱 $\sigma_p(A)$，连续谱 $\sigma_c(A)$和剩余谱 $\sigma_r(A)$。这些被定义如下：$\lambda\in\sigma_p(A)$ 如果 $\lambda I-A$ 不是一对一的。$\lambda\in\sigma_c(A)$，如果 $\lambda I-A$ 是一对一的，$\lambda I-A$ 不是到上的但其值域在X 中稠密。最后 $\lambda\in\sigma_r(A)$，如果 $\lambda I-A$是一对一的且其值域不在X中稠密。显然，由这些定义，$\sigma_p(A)$，$\sigma_c(A)$和 $\sigma_r(A)$ 是互不相交

的，并且它们的并是 $\sigma(A)$。在本节剩下的部分我们将研究A的谱的每一部分和 $T(t)$的谱的相应部分间的关系。我们先考虑点谱。

定理 2.4 设 $T(t)$是 C_0 半群，且 A 是其无穷小生成元，则

$$e^{t\sigma_p(A)}\subset\sigma_p(T(t))\subset e^{t\sigma_p(A)}\cup\{0\}. \tag{2.10}$$

更明确地，如果 $\lambda\in\sigma_p(A)$，则 $e^{\lambda t}\in\sigma_p(T(t))$ 和如果 $e^{\lambda t}\in\sigma_p(T(t))$，则存在 $k\in\boldsymbol{N}$ 使得 $\lambda_k=\lambda+2\pi ik/t\in\sigma_p(A)$。

证明 如果$\lambda\in\sigma_p(A)$，则存在 $x_0\in D(A)$，$x_0\neq0$，使得 $(\lambda I-A)x_0=0$。那么由(2.3)知 $(e^{\lambda t}I-T(t))x_0=0$，因此 $e^{\lambda t}\in\sigma_p(T(t))$。这证明了第一个包含式。为证明第二个包含式，设 $e^{\lambda t}\in\sigma_p(T(t))$，且 $x_0\neq0$满足$(e^{\lambda t}I-T(t))x_0=0$。由此推出连续函数 $s\to e^{-\lambda s}T(s)x_0$ 是具有周期 t 的周期函数。因为它不恒为零，所以其**Fourier** 系数之一必不为零。因此存在 $k\in\boldsymbol{N}$使得

$$x_k=\frac{1}{t}\int_0^t e^{-(2\pi ik/t)s}\ (e^{-\lambda s}\ T(s)x_0)ds\neq0. \tag{2.11}$$

我们将证明 $\lambda_k=\lambda+2\pi ik/t$ 是 A 的一个特征值，设 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$。对于 $Re\mu>\omega$ 我们有

$$\begin{aligned}R(\mu;\ A)x_0&=\int_0^\infty e^{-\mu s}\ T(s)x_0\ ds=\sum_{n=0}^\infty\int_{nt}^{(n+1)t}e^{-\mu s}\ T(s)x_0ds\\&=\sum_{n=0}^\infty e^{n(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\mu s}\ T(s)x_0ds\\&=(1-e^{(\lambda-\mu)t})^{-1}\int_0^t e^{-\mu s}\ T(s)x_0ds.\end{aligned} \tag{2.12}$$

这里我们用了 $e^{-\lambda s}T(s)x_0$的周期性。(2.12)右端的积分显然是一个整函数，因此由(2.12)，$R(\mu, A)$能延拓成一个亚纯函数，其可能的极点在 $\lambda_n=\lambda+2\pi in/t$，$n\in\boldsymbol{N}$。由(2.12)易见

$$\lim_{\mu\to\lambda_k}(\mu-\lambda_k)R(\mu; A)x_0=x_k \tag{2.13}$$

和

$$\lim_{\mu\to\lambda_k}(\lambda_k I-A)[(\mu-\lambda_k)R(\mu; A)x_0]=0. \tag{2.14}$$

由 A 的闭性和(2.13)，(2.14)知$x_k\in D(A)$和$(\lambda_k I-A)x_k=0$，即 $\lambda_k\in\sigma_p(A)$。

我们现在转向A 的剩余谱。

定理 2.5 设 $T(t)$是C_0 半群，A 是其无穷小生成元，则

(i) 如果 $\lambda\in\sigma_r(A)$和对于 $n\in\boldsymbol{N}$ 设有 $\lambda_n=\lambda+2\pi in/t$ 在 $\sigma_p(A)$中，则 $e^{\lambda t}\in\sigma_r(T(t))$。

(ii) 如果 $e^{\lambda t}\in\sigma_r(T(t))$，则对于 $n\in\boldsymbol{N}$ 没有 $\lambda_n=\lambda+2\pi in/t$ 在 $\sigma_p(A)$中，并且存在 $k\in\boldsymbol{N}$使得 $\lambda_k\in\sigma_r(A)$。

证明 若 $\lambda\in\sigma_r(A)$，则存在 $x^*\in X^*$，$x^*\neq 0$ 使得对一切 $x\in D(A)$ 有$\langle x^*, (\lambda I-A)x\rangle=0$。于是由 (2.2) 对一切 $x\in X$ 有$\langle x^*, (e^{\lambda t}I-T(t)x\rangle=0$，因此 $e^{\lambda t}I-T(t)$ 的值域在 X 中不稠密。如果 $e^{\lambda t}I-T(t)$ 不是一对一的，则由定理2.4存在$k\in\boldsymbol{N}$ 使得 $\lambda_k\in\sigma_p(A)$，这和我们的假设 $\lambda_n\notin\sigma_p(A)$ 矛盾。所以 $e^{\lambda t}I-T(t)$ 是一对一的和 $e^{\lambda t}\in\sigma_r(T(t))$ 这结束了(i)的证明。

为了证明 (ii) 我们首先注意，如果对某一 k，$\lambda_k=\lambda+2\pi ik/t\in\sigma_p(A)$，则由定理 2.4 知 $e^{\lambda t}\in\sigma_p(T(t))$，这和 $e^{\lambda t}\in\sigma_r(T(t))$ 的假设矛盾。因此只须证明对某一 $k\in\boldsymbol{N}$，

$\lambda_k \in \sigma_r(A)$ 就充分了。这立即可得，如果我们指出 $\{\lambda_n\} \subset \rho(A) \cup \sigma_c(A)$ 是不可能的。从(2.3)我们有

$$(e^{\lambda_n t} I - T(t))x = B_{\lambda_n}(t)(\lambda_n I - A)x,$$

$$\text{对于 } x \in D(A),\ n \in \mathbf{N} \text{ 成立。} \tag{2.15}$$

因为由我们的假设 $e^{\lambda t} = e^{\lambda_n t} \in \sigma_r(T(t))$，所以(2.15)的右端属于 X 的一个固定的非稠密线性子空间 Y，另一方面如果 $\lambda_n \in \rho(A) \cup \sigma_c(A)$，则 $\lambda_n I - A$ 的值域在 X 中稠密，于是由(2.15)，对每一 $n \in \mathbf{N}$，$B_{\lambda_n}(t)$ 的值域属于 Y。记连续函数 $e^{-\lambda s} T(s)$ 的 **Fourier** 级数如下

$$e^{-\lambda s} T(s)x \sim \frac{1}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(2\pi n/t)s} B_{\lambda_n}(t)x. \tag{2.16}$$

(2.16)右端的每一项属于 Y. 如古典的数值情形一样，对于 $0<s<t$，(2.16)(C.1)可和到 $e^{-\lambda s} T(t)x$，因此对于 $0<s<t$，$e^{-\lambda s} T(s)x \in Y$，让 $s \downarrow 0$，导致对每一 $x \in D(A)$ 有 $x \in \overline{Y}$. 这是不可能的，因为 Y 是 X 的一个真闭子空间，而 $D(A)$ 在 X 中稠密。

定理 2.6 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。如果 $\lambda \in \sigma_c(A)$ 和没有 $\lambda_n = \lambda + 2\pi in/t$ 在 $\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$ 中，则 $e^{\lambda t} \in \sigma_c(T(t))$.

证明 由定理2.3，如果 $\lambda \in \sigma_c(A)$，则 $e^{\lambda t} \in \sigma(T(t))$. 如果 $e^{\lambda t} \in \sigma_p(T(t))$，则根据定理2.4有某一 $\lambda_k \in \sigma_p(A)$，因此与假设矛盾。类似地如果 $e^{\lambda t} \in \sigma_r(T(t))$，则根据定理2.5亦有某一 $\lambda_k \in \sigma_r(A)$，同样与假设矛盾。因此只有 $e^{\lambda t} \in \sigma_c(T(t))$。证毕。

注 定理2.6的逆不成立。可能有 $e^{\lambda t}\in\sigma_c(T(t))$，而所有$\lambda_n=\lambda+2\pi in/t$ 是在 $\rho(A)$中。

§2.3 紧算子半群

定义 3.1 一个C_0半群 $T(t)$称为对 $t>t_0$ 是紧的，如果对每一 $t>t_0$，$T(t)$ 是一个紧算子。$T(t)$称为紧的，如果它对 $t>0$ 是紧的。

注意如果 $T(t)$对 $t\geqslant 0$ 是紧的，那么特别地，恒等算子是紧的，因此 X 必是有限维的。再请注意，若对某一 $t_0>0$，$T(t_0)$ 是紧的，则对一切 $t\geqslant t_0$，$T(t)$ 也是紧的，因为 $T(t)=T(t-t_0)T(t_0)$，而 $T(t-t_0)$是有界的。

定理 3.2 设 $T(t)$是C_0 半群。如果 $T(t)$对 $t>t_0$ 是紧的，则对 $t>t_0$，$T(t)$依一致算子拓扑是连续的。

证明 设对于 $0\leqslant s\leqslant 1$，$\|T(t)\|\leqslant M$和$\varepsilon>0$ 是给定的。如果 $t>t_0$，则集 $U_t=\{T(t)x:\ \|x\|\leqslant 1\}$是紧的。因此存在$x_1$，$x_2$，…，$x_N$ 使得中心在 $T(t)x_j$ $(1\leqslant j\leqslant N)$ 半径为$\varepsilon/2(M+1)$的开球覆盖 U_t。显然，由 $T(t)$ 的强连续性，存在$0<h_0\leqslant 1$，使得

$$\|T(t+h)x_j-T(t)x_j\|<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{对于}0\leqslant h\leqslant h_0$$

$$\text{和 } 1\leqslant j<N \text{ 成立。} \tag{3.1}$$

设 $x\in X$，$\|x\|\leqslant 1$，则存在指标，$1\leqslant j\leqslant N$，(j 依赖于 x)，使得

$$\|T(t)x - T(t)x_j\| < \varepsilon/2(M+1). \tag{3.2}$$

因此对于 $0 \leqslant h \leqslant h_0$ 和$\|x\| \leqslant 1$，我们有

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leqslant \|T(h)\| \cdot \|T(t)x - T(t)x_j\| + \|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| + \|T(t)x_j - T(t)x\| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

这就证明了 $T(t)$依一致算子拓扑对于 $t > t_0$ 的连续性。

定理 3.3 设 $T(t)$是C_0 半群，A 是其无穷小生成元。则 $T(t)$是一个紧半群当且仅当 $T(t)$对 $t > 0$ 依一致算子拓扑是连续的和 $R(\lambda; A)$对 $\lambda \in \rho(A)$是紧的。

证明 设$\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$. $T(t)$对 $t > 0$是紧的，则由定理3.2，$T(t)$对 $t > 0$ 依一致算子拓扑是连续的。因此

$$R(\lambda; A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds, \quad \text{对于 } Re\lambda > \omega \text{ 成立。} \tag{3.4}$$

且积分依一致算子拓扑存在。设 $\varepsilon > 0$，$Re\lambda > \omega$ 和

$$R_\varepsilon(\lambda) = \int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds. \tag{3.5}$$

因为对每一 $s > 0$，$T(s)$是紧的，所以 $R_\varepsilon(\lambda)$是紧的。但

$$\|R(\lambda; A) - R_\varepsilon(\lambda)\| \leqslant \left\| \int_0^\varepsilon e^{-\lambda s} T(s) ds \right\|$$

$$\leqslant \varepsilon M e^{\omega \varepsilon} \to 0, \text{ 当 } \varepsilon \downarrow 0 \text{ 时。}$$

如果对某一 $\mu \in \rho(A)$，$R(\mu; A)$是紧的，则对一切 $\lambda \in \rho(A)$，$R(\lambda; A)$是紧的。因此定理的条件是必要的。

现设对于 $\lambda \in \rho(A)$，$R(\lambda, A)$是紧的和 $T(t)$对 $t > 0$ 依一致算子拓扑是连续的，则(3.4)成立且

$$\lambda R(\lambda;\ A)T(t)-T(t)=\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda s}(T(t+s)-T(t))ds. \tag{3.6}$$

如果λ是实的，$\lambda>\omega$，则对一切 $\delta>0$，我们有

$$\begin{aligned}\|\lambda R(\lambda;\ A)T(t)-T(t)\| &\leqslant \int_0^\delta \lambda e^{-\lambda s}\|T(t+s)-T(t)\|ds\\ &+\int_\delta^\infty \lambda e^{-\lambda s}\|T(t+s)-T(t)\|ds.\\ &\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant\delta}\|T(t+s)-T(t)\|+2\lambda(\lambda-\omega)^{-1}Me^{\omega(t+\delta)}e^{-\lambda\delta}.\end{aligned}$$

由此推出

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\lambda R(\lambda,\ A)T(t)-T(t)\|\leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant\delta}\|T(t+s)-T(t)\|,$$

$$\text{对每一 } \delta>0 \text{ 成立。} \tag{3.7}$$

因为 $\delta>0$ 是任意的，我们有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\lambda R(\lambda;\ T)T(t)-T(t)\|=0\ .$$

但对每一 $\lambda>\omega$，$\lambda R(\lambda;\ A)\ T(t)$ 是紧的，因此 $T(t)$ 是紧的。

推论 3.4 设 $T(t)$是C_0 半群，A 是其无穷小生成元。如果对某一 $\lambda\in\rho(A)$，$R(\lambda;\ A)$是紧的和 $T(t)$对 $t>t_0$ 依一致算子拓扑是连续的。则 $T(t)$对 $t>t_0$ 是紧的。

证明 由我们的假设，$R(\lambda;\ A)$对一切 $\lambda\in\rho(A)$ 是紧的和(3.6)对一切 $t>t_0$ 成立。其余的证明和定理3.3的证明的末尾相同。

推论 3.5 设 $T(t)$是一致连续半群（定义1.1.1）. 则

$T(t)$是紧半群当且仅当对每一 $\lambda\in\rho(A)$，$R(\lambda, A)$是紧的。

定理 3.3中的紧半群的特征并不完全令人满意，因为它没有仅用其无穷小生成元 A的性质刻划紧半群$T(t)$的特征。原因是到目前为止还不知道依据 A或预解式 $R(\lambda; A)$刻划的以保证 $T(t)$对 $t>0$ 依一致算子拓扑连续的必要和充分的条件。$T(t)$ 对 $t>0$ 依一致算子拓扑连续的一个必要条件是如下：

定理 3.6 设 $T(t)$是 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。如果 $T(t)$ 对 $t>0$ 依一致拓扑算子是连续的，则存在函数 ϕ：$[0, \infty)\to[0, \infty)$，使得

$$\rho(A)\supset\{\lambda;\ \lambda=\sigma+i\tau,\ |\tau|\geqslant\phi(|\sigma|)\}\tag{3.8}$$

和

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\|R(\sigma+i\tau;\ A)\|=0,\ \text{对每一实数}\ \sigma\ \text{成立。}\tag{3.9}$$

证明 不失一般性我们假设 $\rho(A)\supset\{\lambda;\ Re\lambda>0\}$ 和 $\|T(t)\|\leqslant M$。否则我们考虑 $S(t)=e^{-\omega t}T(t)$，并选取 ω 使这些条件成立。显然 $T(t)$对 $t>0$ 依一致算子拓扑连续当且仅当 $S(t)$有这种性质。

设 $\sigma>0$，则由我们的假设，$\lambda=\sigma+i\tau\in\rho(A)$。以 $x=R(\lambda;\ A)y$ 代入(2.3)，我们得到

$$\begin{aligned}&e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)y-T(t)R(\lambda;\ A)y\\&\quad=B_\lambda(t)y,\ \text{对于}\ y\in X\ \text{成立。}\end{aligned}\tag{3.10}$$

由此推出

$$(e^{\sigma t}-M)\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant e^{\sigma t}\left\|\int_0^t e^{-i\tau s}e^{-\sigma s}T(s)ds\right\|.$$

选取 $t>\sigma^{-1}\log M$，则

$$\|R(\sigma+i\tau;\ A)\|\leqslant C\left\|\int_0^t e^{-i\tau s}e^{-\sigma s}T(s)ds\right\| \tag{3.11}$$

对于某一不依赖于 τ 的常数 C 成立。当 $|\tau|\to\infty$ 时，由 **Riemann-Lebesgue** 引理知(3.11)的右端趋于零。对 $\sigma\leqslant 0$，我们记

$$R(\lambda;\ A)=\sum_{k=0}^{\infty}R(1+i\tau;\ A)^{k+1}(1+i\tau-\lambda)^k, \tag{3.12}$$

并命

$$\phi(|\tau|)=\max_{|t|>|\tau|}\|R(1+i\tau t;\ A)\|.$$

根据前面已证明的，当 $|\tau|\to\infty$ 时，$\phi(|\tau|)\to 0$。级数(3.12)显然对 $|1-\sigma|<1/2\phi(|\tau|)$ 依一致算子拓扑收敛，由此推出(3.8)。此外，对任意固定的满足 $|1-\sigma|\leqslant 1/2\phi(|\tau|)$ 的 σ，我们有

$$\|R(\sigma+i\tau;\ A)\|\leqslant 2\|R(1+i\tau;\ A)\|\leqslant 2\phi(|\tau|).$$

因此(3.9)成立。证毕。

推论 3.7 设 $T(t)$ 是一个紧 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。则对每一 $-\infty<\alpha\leqslant\beta<\infty$，带域 $\alpha\leqslant Re\lambda\leqslant\beta$ 和 $\sigma(A)$ 的交至多包含 A 的有限个特征值。

证明 半群 $T(t)$ 的紧性推出 $R(\lambda,\ A)$ 对于 $\lambda\in\rho(A)$ 的紧性（定理3.3）。因此 $R(\lambda;\ A)$ 的谱由零和一个特征值的序列组成，它可以是有限的甚至是空的。如果序列是无限的，则该序列收敛到零。这就意味着 $\sigma(A)$ 是由以 ∞ 为仅有的极限点的特征值序列组成。由定理 3.6，$\sigma(A)$ 和带域 $\alpha\leqslant Re\lambda$

$\leqslant\beta$ 的交是紧的，因此仅可能包含A的有限个特征值。

请注意，在推论3.7中我们已经证明：如果 $T(t)$是一个紧C_0 半群，则其无穷小生成元的谱 $\sigma(\mathrm{A})$仅由特征值组成。

§2.4 可 微 性

定义 4.1 设 $T(t)$是 Banach 空间 X 上的C_0 半群。半群 $T(t)$ 称为对 $t>t_0$ 是可微的，如果对于每一 $x\in X$，$t\to T(t)x$对于 $t>t_0$ 是可微的。$T(t)$称为是可微的，如果它对于 $t>0$ 是可微的。

在定理 1.2.4(c)中我们已经看到，如果 $T(t)$是具无穷小生成元 A 的 C_0 半群和 $x\in D(\mathrm{A})$，则对 $t>0$，$t\to T(t)x$ 是可微的。此外，如果 $T(t)$ 是可微的，则对每一 $x\in X$，$t\to T(t)x$ 对 $t>0$ 是可微的。注意，如果 $t\to T(t)x$ 对每一 $x\in X$ 和 $t\geqslant 0$ 是可微的，则 $D(\mathrm{A})=X$。又因为A是闭的，所以A 必需是有界的。

例 2.1 提供了一个对 $t>1$ 是可微的 C_0 半群的简单例子。

引理 4.2 设 $T(t)$是对 $t>t_0$ 可微的C_0 半群，A 是其无穷小生成元，则

(a) 对于 $t>nt_0$，$n=1, 2, \cdots$，$T(t)$：$X\to D(\mathrm{A}^n)$ 和 $T^{(n)}(t)=\mathrm{A}^nT(t)$是有界线性算子。

(b) 对于 $t>nt_0$，$n=1, 2, \cdots$，$T^{(n-1)}(t)$ 是依一致算子拓扑连续的。

证明 我们从 $n=1$开始。根据我们的假设，$t\to T(t)x$对

$t>t_0$ 和一切 $x\in X$ 是可微的。因此 $T(t)x\in D(A)$ 和 $T'(t)x=AT(t)x$，对一切 $x\in X$ 和 $t>t_0$ 成立。此外，因为A是闭的和 $T(t)$ 是有界的，所以 $AT(t)$ 是闭的。对于 $t>t_0$，$AT(t)$ 是定义在整个 X 上，因此由闭图象定理它是一个有界线性算子。这对 $n=1$ 结束了(a)的证明。为了证明(b)，设对于 $0\leqslant t\leqslant 1$，$\|T(t)\|\leqslant M_1$ 和 $t_0<t_1\leqslant t_2\leqslant t_1+1$，则

$$T(t_2)x-T(t_1)x=\int_{t_1}^{t_2}AT(s)x\,ds=\int_{t_1}^{t_2}T(s-t_1)AT(t_1)x\,ds, \tag{4.1}$$

因此

$$\|T(t_2)x-T(t_1)x\|\leqslant(t_2-t_1)M_1\|AT(t_1)\|\cdot\|x\|.$$

由此推出 $T(t)$ 对 $t>t_0$ 依一致算子拓扑的连续性。

我们现在对 n 用归纳法。设 (a) 和 (b) 对 n 是真的，$t>(n+1)t_0$。取 $s>nt_0$ 使得 $t-s>t_0$，则

$$T^{(n)}(t)x=T(t-s)A^nT(s)x, \text{ 对每一}x\in X\text{成立。} \tag{4.2}$$

因为 $t-s>t_0$，(4.2) 的右端是可微的，因此 $T(t)x$ 是 $n+1$ 次可微的和对每一 $x\in X$ 及 $t>(n+1)t_0$，$T^{(n+1)}(t)x=A^{n+1}T(t)x$。如同 $n=1$ 的情况一样这意味着对于 $t>(n+1)t_0$，$T(t)$：$X\to D(A^{n+1})$ 和 $A^{n+1}T(t)$ 是一个有界线性算子。这就结束了(a)的证明。$T^{(n)}(t)$ 对 $t>(n+1)t_0$ 依一致算子拓扑的连续性恰如 $n=1$ 的证明，利用 $A^nT(t)$ 对于 $t>(n+1)t_0$ 是有界的事实即可。

推论 4.3 设 $T(t)$ 是对于 $t>t_0$ 可微的 C_0 半群。如果 $t>(n+1)t_0$，则 $T(t)$ 依一致算子拓扑 n 次可微的。

证明 由引理4.2的部分(b)知对于 $t>(n+1)t_0$，$A^kT(t)$，$1\leqslant k\leqslant n$ 是依一致算子拓扑连续的，因此如果 $t>(n+1)t_0$，

我们有

$$T^{(k-1)}(t+h) - T^{(k-1)}(t) = \int_t^{t+h} A^k T(s) ds, \text{ 对于 } 1 \leqslant k \leqslant n \text{ 成立。}$$

由此推出当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $t > (n+1)t_0$ 时，$T^{(k-1)}(t)$ 依一致算子拓扑的可微性。于是 $T(t)$ 是依一致算子拓扑 n 次可微的。

推论 4. $T(t)$是一个可微的C_0半群，则对 $t>0$，$T(t)$是依一致算子拓扑无穷次可微的。

引理 4.5 设 $T(t)$是一个可微的 C_0 半群，A 是其无穷小生成元，则

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

$$\text{对于 } n=1,\ 2,\ \cdots \text{成立。} \tag{4.3}$$

证明 引理可对n用归纳法证明。对 $n=1$ 结果已经在引理4.2中证明。如果(4.3)对 n 和 $t \geqslant s$ 成立，则

$$T^{(n)}(t) = \left(AT\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = T(t-s)\left(AT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n. \tag{4.4}$$

在(4.4)中对 t 微分我们得到

$$T^{(n+1)}(t) = AT(t-s)\left(AT\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n. \tag{4.5}$$

以 $s = nt/(n+1)$ 代入(4.5)即得对于 $n+1$ 的结果。

现在我们转向对于 $t > t_0$ 是可微的 C_0 半群的无穷小生成元的特征问题，在给出主要结果之前我们需要一个准备结果。

引理 4.6 设 $T(t)$ 是 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。如果对 $t>t_0$，$T(t)$ 是可微的和 $\lambda\in\sigma(A)$，$t>t_0$。则 $\lambda e^{\lambda t}\in\sigma(AT(t))$。

证明 我们定义

$$B_\lambda(t)x=\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds.$$

显然 $B_\lambda(t)x$ 是关于 t 可微的，并且微分得

$$B_\lambda'(t)x=T(t)x+\lambda B_\lambda(t)x.$$

$B_\lambda'(t)$ 是 X 中的一个有界线性算子。现设 $t>t_0$，并在(2.2)中对 t 微分，我们得到

$$\lambda e^{\lambda t}-AT(t)x=(\lambda I-A)B_\lambda'(t)x,\ \text{对每一}\ x\in X\ \text{成立。}\tag{4.6}$$

设

$$C(t)x=\lambda e^{\lambda t}x-AT(t)x.$$

对于 $t>t_0$，$C(t)$ 是一个有界线性算子。容易验证 $B_\lambda'(t)$ 和 $C(t)$ 可交换和对 $x\in D(A)$，$AB_\lambda'(t)x=B_\lambda'(t)Ax$。如果 $\lambda e^{\lambda t}\in\rho(AT(t))$，则 $C(t)$ 是可逆的，且由(4.6)得

$$x=(\lambda I-A)B_\lambda'(t)C(t)^{-1}x,\ \text{对每一}\ x\in X\text{成立，}$$

即 $B_\lambda'(t)C(t)^{-1}$ 是 $\lambda I-A$ 的右逆。用 $C(t)^{-1}$ 从左边作用(4.6)我们有

$$x=C(t)^{-1}(\lambda I-A)B_\lambda'(t)x.$$

取 $x\in D(A)$，我们可以交换 $B_\lambda'(t)$ 和 $(\lambda I-A)$。然后利用 $B_\lambda'(t)$ 和 $C(t)$ 的可换性（因此 $B_\lambda'(t)$ 和 $C(t)^{-1}$ 亦可换），我们得到

$$x=B_\lambda'(t)C(t)^{-1}(\lambda I-A)x,\ \text{对一切}\ x\in D(A)\text{成立。}$$

因此$B_\lambda'(t)C(t)^{-1}$是$\lambda I-A$的逆，$\lambda\in\rho(A)$。故结果成立。

定理 4.7 设$T(t)$是C_0半群，A是其无穷小生成元。如果$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，则以下两个结论等价：

（i） 存在$t_0>0$使得$T(t)$对$t>t_0$是可微的。

（ii） 存在实常数a，b和C使得$b>0$，$C>0$，

$$\rho(A)\supset\Sigma=\{\lambda;\ Re\lambda\geqslant a-b\log|Im\lambda|\} \tag{4.7}$$

和

$$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant C|Im\lambda| \qquad \text{对于 } \lambda\in\Sigma,\ Re\lambda\leqslant\omega \text{ 成立。} \tag{4.8}$$

证明 不失一般性我们可设$\omega<0$。否则我们可考虑满足$\|T_1(t)\|\leqslant Me^{-\varepsilon t}$的半群$T_1(t)=e^{-(\omega+\varepsilon)}T(t)$，对于它们（i）或（ii）成立当且仅当它们对$T_1(t)$成立。因此我们将设$\omega<0$。

我们首先指出（ii）蕴涵（i）。设Γ是Σ中的一条路径，它由三部分组成：Γ_1由$Re\lambda=2a-b\log(-Im\lambda)$，$-\infty<Im\lambda\leqslant-L=-e^{2a/b}$给出，$\Gamma_2$由$Re\lambda=0$，$-L\leqslant Im\lambda\leqslant L$给出和$\Gamma_3$由$Re\lambda=2a-b\log(Im\lambda)$，$L\leqslant Im\lambda<\infty$给出。$\Gamma$这样定向使得$Im\lambda$沿着$\Gamma$是递增的。通过改变(4.8)中的常数$C$我们可以假设(4.8)对$\lambda\in\Gamma_j$，$j=1,3$成立。设$\Gamma_n=\Gamma\cap\{\lambda;\ |\lambda|<n\}$。因为$\lambda\to e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)$是从$\rho(A)\subset\mathbf{C}$到$B(X)$（$X$上全体有界线性算子的空间）是连续的。所以积分

$$S_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)d\lambda$$

是有定义的。当$n\to\infty$时，如果$S_n(t)$在$B(X)$中收敛，我们定义其极限为广义积分

$$S(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)d\lambda. \tag{4.9}$$

且称(4.9)中的积分在 $B(X)$ 中，即依一致算子拓扑收敛。此外，易见 $S_n(t)$ 在 $B(X)$ 中是可微的，其导数 $S_n'(t)$ 是

$$S_n'(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)d\lambda. \tag{4.10}$$

如果当 $n\to\infty$ 时，$S_n(t)$ 和 $S_n'(t)$ 对 $t\geqslant t_1$，在 $B(X)$ 中一致收敛，则对 $t\geqslant t_1$，$S_n(t)$ 的极限 $S'(t)$ 显然是 $S(t)$ 在 $B(X)$ 中的导数。我们将证明当 $t>\frac{2}{b}$ 时，(4.9)在 $B(X)$ 中收敛和

$$S'(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)d\lambda \tag{4.11}$$

当 $t>\frac{3}{b}$ 时在 $B(X)$ 中收敛。此外，对每一 $\delta>0$，(4.9)和(4.11)关于 t 分别对 $t\geqslant\frac{2}{b}+\delta$ 和 $t\geqslant\frac{3}{b}+\delta$ 一致收敛。为证明这些论断我们命 $\Gamma_{j,n}=\Gamma_j\cap\{\lambda:\ |\lambda|<n\}$，$j=1, 2, 3$，

$$S_{j,n}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{j,n}} e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)d\lambda,\ j=1,\ 2,\ 3, \tag{4.12}$$

和

$$S_j(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)d\lambda,\ j=1,\ 2,\ 3. \tag{4.13}$$

取 $n>L$，显然 $\Gamma_{2,n}=\Gamma_2$ 和 $S_{2,n}(t)=S_2(t)$，因此 $S_2(t)$ 对每一 $t\geqslant 0$ 有定义。为了证明积分 $S_{j,n}(t)$ $(j=1,\ 3)$ 的收敛性

我们在各自的积分路径上估计它们的被积函数，得到当 $\lambda=\sigma+i\tau\in\Gamma_j$，$j=1$，3时

$$\|e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)\|\leqslant|e^{\lambda t}|\cdot\|R(\lambda;\ A)\|$$
$$\leqslant e^{2at}|\tau|^{-bt}C|\tau|=Ce^{2at}|\tau|^{1-bt}. \qquad (4.14)$$

因此对 $n>m\geqslant L$，我们有

$$\|S_{j,n}(t)-S_{j,m}(t)\|=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\Gamma\cap\{m<|\lambda|<n\}}e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)d\lambda\right\|$$
$$\leqslant C_1e^{2at}\int_m^n|\tau|^{1-bt}d|\tau|, \qquad (4.15)$$

这里C_1是不依赖于t的常数。因此对$t>\frac{2}{b}$，$S_{j,n}(t)$，$j=1$，3在 $B(X)$ 中收敛，并且对每一 $\delta>0$，其收敛关于 t 对于 $t>\frac{2}{b}+\delta$ 是一致的。这就结束了(4.9) 的收敛性证明。我们类似进行(4.11) 的收敛性证明。首先，我们注意 $S_2'(t)$ 对于 $t\geqslant0$ 存在。其次我们在各自的积分路径上估计 $S_{j,n}'(t)$，$j=1$，3 的被积函数如下：

$$\|\lambda e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)\|\leqslant|\lambda|C_1e^{2at}|\tau|^{1-bt}\leqslant C_2e^{2at}|\tau|^{2-bt}, \qquad (4.16)$$

这里 C_1 是不依赖于 t 的常数。现在 $S_{j,n}'(t)$，$j=1$，3 对 $t>\frac{3}{b}$ 的收敛性恰如 $S_{j,n}(t)$，$j=1$，3 对 $t>\frac{2}{b}$ 的收敛性一样可得。因此 $S(t)$对 $t>\frac{2}{b}$ 存在和对 $t>\frac{3}{b}$是可微的。为

了证明 $T(t)$ 对 $t>\frac{3}{b}$ 是可微的，现在我们将指出对 $t>\frac{2}{b}$，$S(t)=T(t)$。

设 $x\in D(\mathrm{A}^2)$，由推论 1.7.5 有

$$T(t)x=\lim_{|\tau|\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\tau}^{\gamma+i\tau}e^{\lambda t}R(\lambda;\ \mathrm{A})xd\lambda,\ \text{对每一}\ \gamma>0\ \text{成立。}\tag{4.17}$$

但对于 $x\in D(A^2)$ 我们有

$$R(\lambda;\ \mathrm{A})x=\frac{x}{\lambda}+\frac{\mathrm{A}x}{\lambda^2}+\frac{R(\lambda;\ \mathrm{A})\mathrm{A}^2x}{\lambda^2}.\tag{4.18}$$

由(4.4)，对每一 $x\in X$ 和 $t>\frac{2}{b}$

$$S(t)x=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{\lambda t}R(\lambda;\ \mathrm{A})xd\lambda.\tag{4.19}$$

在(4.19)中取 $x\in D(\mathrm{A}^2)$，利用估计(4.18)和(4.8)，我们可在(4.19)中移动积分路径 Γ 到直线 $\lambda+i\tau$，$-\infty<\tau<\infty$。因此对于 $t>\frac{2}{b}$ 和 $x\in D(\mathrm{A}^2)$，$T(t)x=S(t)x$。因为对于 $t>\frac{2}{b}$，$S(t)$ 和 $T(t)$ 都是有界算子及 $D(\mathrm{A}^2)$ 在 X 中稠密知 $S(t)=T(t)$ 对于 $t>\frac{2}{b}$ 成立。因此对于 $t>\frac{3}{b}$，$T(t)$ 是可微的，甚至是依一致算子拓扑可微的。于是(ii)推出(i)。

其次我们指出(i)蕴涵(ii)。如果 $t_1>t_0$，则 $\mathrm{A}T(t_1)$ 是

有界线性算子。命$\|AT(t_1)\|=M(t_1)$，由引理4.6得

$$\sigma(A)\subset\{\lambda: \lambda e^{\lambda t_1}\in\sigma(AT(t_1))\}\subset\{\lambda: |\lambda e^{\lambda t_1}|\leqslant M(t_1)\} \tag{4.20}$$

因此

$$\rho(A)\supset\{\lambda: Re\lambda>t_1^{-1}\log M(t_1)-t_1^{-1}\log|Im\lambda|\}.$$

对某一 $\delta>0$，命

$$\Sigma=\{\lambda: Re\lambda>t_1^{-1}\log(1+\delta)M(t_1)-t_1^{-1}\log|Im\lambda|\}. \tag{4.21}$$

显然 $\Sigma\subset\rho(A)$，这就证明了（4.7）。为了证明（4.8），在(4.6)中以 $R(\lambda;A)x$ 代替 x，其结果是

$$\lambda e^{\lambda t}R(\lambda; A)x=AT(t)R(\lambda; A)x+T(t)x+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds. \tag{4.22}$$

对 $t=t_1$ 和 $\lambda=\sigma+i\tau\in\Sigma$ 估计(4.22)我们得到

$$\|R(\lambda; A)x\|\leqslant|\tau|^{-1}e^{-\sigma t_1}(\|AT(t_1)\|\cdot\|R(\lambda; A)\|+\|T(t_1)\|)\|x\|+\left\|\int_0^{t_1}e^{-\lambda s}T(s)xds\right\|.$$

但对于 $\lambda\in\Sigma$，有 $|\tau|^{-1}e^{-\sigma t_1}\|AT(t_1)\|\leqslant(1+\delta)^{-1}$。取$|\tau|\geqslant1$ 和 $\sigma\leqslant\omega<0$ 得

$$\|R(\lambda;A)x\|\varepsilon\leqslant\frac{1+\delta}{\delta}\left[|\tau|^{-1}e^{(\omega-\sigma)t_1}M\|x\|+\left\|\int_0^{t_1}e^{-\lambda s}T(s)xds\right\|\right]$$

$$\leqslant\left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)Me^{(\omega-\sigma)t_1}(|\tau|^{-1}+t_1)\|x\|$$

$$\leqslant \frac{M(1+t_1)\ e^{\omega t_1}}{\delta\|AT(t_1)\|}|\tau|\|x\| = C|\tau|\cdot\|x\|.$$

因此对于 $\lambda\in\Sigma$, $Re\lambda\leqslant\omega$, 有$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant C|Im\lambda|$。证毕。

从定理4.7 的证明我们得到如果 $T(t)$是一个满足(4.7)和(4.8)的C_0 半群，则$T(t)$对 $t>t_0+3/b$ 是可微的，并且如果 $T(t)$ 对 $t>t_0$ 是可微的，则对 $t>t_0$ 在(4.7)中的常数 b 能取为 $b=1/t_1$。这些注记使我们能给出以下可微半群的无穷小生成元的特征。

定理 4.8 设 $T(t)$是满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$的 C_0 半群，A 是其生成元，则$T(t)$是可微半群当且仅当对每一 $b>0$ 存在实数 a_b 和正常数 C_b 使得

$$\sigma(A)\supset\Sigma_b=\{\lambda:\ Re\lambda>a_b-b\log|Im\lambda|\}。\tag{4.23}$$

和

$$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant C_b|Im\lambda|,\ \lambda\in\Sigma_b,\ Re\lambda\leqslant\omega.\tag{4.24}$$

以下定理是定理4.7的一个简单推论。

定理 4.9 设A是满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$的 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元。如果对某一 $\mu\geqslant\omega$,

$$\limsup_{|\tau|\to\infty}\log|\tau|\cdot\|R(\mu+i\tau;\ A)\|=C<\infty\tag{4.25}$$

则$T(t)$对 $t>3C$ 是可微的。

证明 我们将指出(4.25)蕴涵定理4.7的条件(ii)。将预解式在点 $\mu+i\tau$ 附近展成 Taylor 级数，我们得到

$$R(\lambda;\ A)=\sum_{k=0}^{\infty}R(\mu+i\tau;\ A)^{k+1}(\mu+i\tau-\lambda)^k.\tag{4.26}$$

只要$\|R(\mu+i\tau;\ A)\|\cdot|\mu+i\tau-\lambda|<1$，这个级数就依一致算

子拓扑收敛。设 $\varepsilon>0$ 是固定的和 τ_0 使得对 $|\tau|>\tau_0$,

$$\|R(\mu+i\tau;\ A)\|\leqslant\frac{C+\varepsilon/2}{\log|\tau|}$$

成立。取 $\lambda=\sigma+i\tau$ 我们看到在区域 $|\tau|>\tau_0$, $|\sigma-\mu|<(C+\varepsilon)^{-1}\log|\tau|$ 中(4.26)收敛，即预解式对于

$$\sigma>C_0-(C+\varepsilon)^{-1}\log|\tau|,\quad |\tau|>\tau_0 \tag{4.27}$$

存在，其中 $C_0=\max(\mu,\ \omega+(\varepsilon+C^{-1}\log\tau_0)$。此外，在这个区域中

$$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant\frac{C_1}{\log|Im\lambda|}\leqslant C_2\ .$$

由定理4.7后的注记我们有 $T(t)$ 对 $t>3(C+\varepsilon)$ 是可微的，且因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，所以 $T(t)$ 对 $t>3C$ 是可微的。

推论 4.10 设 A 是满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群的无穷小生成元。如果对某一 $\mu\geqslant\omega$,

$$\limsup_{|\tau|\to\infty}\log|\tau|\cdot\|R(\mu+i\tau;\ A)\|=0, \tag{4.28}$$

则 $T(t)$ 是一个可微半群。

我们给出 C_0 半群对 $t>t_0$ 的可微性和当 $t\to 0$ 时，$\|T(t)-I\|$ 的性态间的若干关系来结束本节。我们已经知道(见定理1.1.2) 如果当 $t\downarrow 0$ 时，$\|T(t)-I\|\to 0$，则 $T(t)$ 是可微半群。在这种情形 $T(t)$ 是对 $t\geqslant 0$ 依一致算子拓扑可微的，且其生成元 A 是一个有界线性算子。以下定理是这个结果的一个重要的推广。

定理 4.11 设 $T(t)$ 是满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群。如果存在常数 $C>0$ 和 $\delta_C>0$ 使得

$$\|T(t)-I\| \leqslant 2-Ct\log(1/t) \quad 对于\ 0<t<\delta_c\ 成立， \tag{4.29}$$

则 $T(t)$ 对 $t>3M/C$ 是可微的。

证明 我们首先证明对一致有界半群，即$\|T(t)\|\leqslant M$的结果，如果 α 是实的和 $x\in D(A)$，则由(2.3)我们有

$$T(t)x-e^{i\alpha t}x=\int_0^t e^{i\alpha(t-s)}T(s)(A-i\alpha I)xds. \tag{4.30}$$

由此推出

$$\|T(t)x-e^{i\alpha t}x\|\leqslant tM\|(A-i\alpha I)x\|.$$

取 $\alpha=\pm\pi/t$ 我们得到

$$\|T(t)x+x\|\leqslant tM\left\|\left(A\pm i\frac{\pi}{t}I\right)x\right\|.$$

由(4.29)得

$$\begin{aligned}\|(I+T(t))x\| &\geqslant 2\|x\|-\|(I-T(t))x\| \\ &\geqslant (Ct\log(1/t))\|x\|. \quad 对于\ 0<t<\delta_C\ 成立。\end{aligned}$$

因此

$$\|(A-i\tau I)x\|\geqslant\left(\frac{C}{M}\log\frac{|\tau|}{\pi}\right)\|x\|. \tag{4.31}$$

这里 $\tau=\pm\pi/t$。

于是当$|\tau|$充分大时 $A-i\tau I$ 是一对一的且有闭值域。我们将推出 $A-i\tau I$ 的值域是整个 X。因为 A 是一个一致有界 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，由注 1.5.4 对每一 $\rho>0$，$(A-(\rho+i\tau)I)^{-1}$ 是 X 中的有界线性算子且其范数由 $M\rho^{-1}$ 控制。设 $f\in X$，命

$$(A-(\rho+i\tau)I)x_\rho=f,$$

则$\|x_\rho\|\leqslant M\rho^{-1}\|f\|$，因此

$$\|(A-i\tau I)x_\rho\|\leqslant\rho\|x_\rho\|+\|f\|\leqslant(M+1)\|f\|. \tag{4.32}$$

由(4.31)和(4.32)，当 $\rho\to0$ 时$\|x_\rho\|$是有界的。因此

$$\|(A-i\tau I)x_\rho-f\|\leqslant\rho\|x_\rho\|\to0,\ \text{当}\ \rho\to0\ \text{时。} \tag{4.33}$$

再利用(4.31)我们从(4.33)推出当 $\rho\to0$ 时，x_ρ 收敛于某一 x。因为 A 是闭的，所以 $x\in D(A)$ 和 $(A-i\tau I)x=f$，因此 $A-i\tau I$ 是到上的，且由(4.31)我们有

$$\|(A-i\tau I)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{C}\left(\log\frac{|\tau|}{\pi}\right)^{-1}.$$

由此推出

$$\limsup_{|\tau|\to\infty}\log|\tau|\cdot\|(A-i\tau I)^{-1}\|\leqslant\frac{M}{C}$$

而所证结果就由定理4.9推出。这结束了$\|T(t)\|\leqslant M$ 的情形的证明。如果$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，$\omega>0$。我们考虑 $S(t)=e^{-\omega t}T(t)$。则$\|S(t)\|\leqslant M$ 和

$$\|S(t)-I\|\leqslant e^{-\omega t}\|T(t)-I\|+e^{-\omega t}-1$$

$$\leqslant2-Ct\log\frac{1}{t}+e^{-\omega t}-1\leqslant2-C_1t\log\frac{1}{t}.$$

对一切 $C>C_1>0$ 和$0<t<\delta_C$ 成立。因此由前一部分证明，对 $t>3M/C_1$，$S(t)$是可微的。又因 $C_1<C$ 是任意的，所以 $T(t)$对 $t>3M/C$ 是可微的。

推论 4.12 设 $T(t)$ 是满足$\|T(t)-I\|\leqslant2-Ct\log\frac{1}{t}$，$0<t<\delta_C$ 的 C_0 半群。如果 $T(t)$能延拓成一个群，则其无穷

小生成元必是有界的。

证明 由定理4.11当 t 充分大时，$T(t)$是可微的，因此由引理 4.2 $AT(t)$是有界的。从 $A=T(-t)AT(t)$知 A 作为两个有界算子的乘积是有界的。

推论 4.13 设 $T(t)$ 是 C_0 群，A 是其无穷小生成元。如果A 是无界的，则

$$\limsup_{t\downarrow 0}\|I-T(t)\|\geqslant 2. \tag{4.34}$$

证明 由推论4.12对每一 $C>0$ 和 $a>0$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\left(\|T(t)-I\|+Ct\log\frac{1}{t}\right)\geqslant 2 \tag{4.35}$$

在(4.35)中让 $a\downarrow 0$ 即得(4.34)。

§2.5 解析半群

到目前为止我们论述的半群其定义域都是非负实轴。现在我们将考虑延拓参数的定义域到复平面中包含非负实轴的区域的可能性。显然为了保持半群的结构，复参数变动的区域必须是一个复数的可加半群。然而在本节中，我们将仅限于很特殊的复数域，即环绕正实轴的角域。

定义 5.1 设$\Delta=\{z:\ \varphi_1<\arg z<\varphi_2,\ \varphi<0<\varphi_2\}$，且对$z\in\Delta$ 设 $T(z)$是一个有界线性算子。称族 $T(z)$，$z\in\Delta$ 是在Δ中的一个解析半群，如果

(i) $z\to T(z)$在Δ中是解析的。

(ii) $T(0)=I$ 和 $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Delta}} T(z)x=x$，对一切 $x\in X$ 成立。

(iii) $T(z_1+z_2)=T(z_1)T(z_2)$，对于 z_1，$z_2\in\Delta$ 成立。

半群$T(t)$称为解析的，如果它在某包含非负实轴的扇形Δ 中是解析的。

显然解析半群在实轴上的限制是一个 C_0 半群。以下我们感兴趣的是一个给定的 C_0 半群延拓为某环绕非负实轴的扇形Δ 中的一个解析半解的可能性。

因为用 $e^{\omega t}$ 乘以一个 C_0 半群并不响影它延拓为某扇形Δ 中的一个解析半群的可能性，我们在本节将只限于对一致有界 C_0 半群的情形来得到我们的许多结果。而对于一般 C_0 半群的结果可以从一致有界 C_0 半群的相应结果以明显的方式得到。为了方便起见，我们亦经常假设 $0\in\rho(A)$，这里 A 是半群 $T(t)$的无穷小生成元，这通常也能通过用 $e^{-\omega t}(\omega>0)$ 乘以一致有界半群$T(t)$得到。

我们通过回忆定理 1.7.7开始我们的讨论，它指出X 中一个稠定义的满足

$$\rho(A)\supset\Sigma=\left\{\lambda:\ |\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}+\delta\right\}\cup\{0\},$$

$$\text{对某}\quad 0<\delta<\frac{\pi}{2}\quad\text{成立。}\tag{5.1}$$

和

$$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|}\quad\text{对于 }\lambda\in\Sigma,\ \lambda\neq 0\text{ 成立。}\tag{5.2}$$

的算子A 是一个一致有界 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元。实

际上有更多的结果成立。由稠定义的满足(5.1)和(5.2)的 A 生成的半群$T(t)$能延拓为扇形$\Delta_\delta=\{z: |\arg z|<\delta\}$中的一个解析半群，并且在每一闭子扇形$\overline{\Delta}_{\delta'}=\{z: |\arg z|\leqslant\delta'<\delta\}$中 $\|T(z)\|$ 是一致有界的。这和更多的结果可以从下述定理得到。

定理 5.2 设 $T(t)$是一个一致有界 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。又设 $0\in\rho(A)$，则以下命题是等价的：

(*a*) $T(t)$能延拓为一个扇形 $\Delta_\delta=\{z: |\arg z|<\delta\}$中的解析半群和$\|T(z)\|$在每一 Δ_δ 的闭子扇形 $\overline{\Delta}_{\delta'}$ 中是一致有界的。

(*b*) 存在常数 C 使得对每一 $\sigma>0$，$\tau\neq 0$

$$\|R(\sigma+i\tau; A)\|\leqslant\frac{C}{|\tau|}. \tag{5.3}$$

(*c*) 存在 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ 和 $M>0$ 使得

$$\rho(A)\supset\Sigma=\left\{\lambda: |\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}+\delta\right\}\cup\{0\} \tag{5.4}$$

和

$$\|R(\lambda; A)\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|},\quad \lambda\in\Sigma,\quad \lambda\neq 0. \tag{5.5}$$

(*d*) $T(t)$对 $t>0$是可微的和存在常数 C 使得

$$\|AT(t)\|\leqslant\frac{C}{t},\quad t>0. \tag{5.6}$$

证明　$(a)\Rightarrow(b)$。设 $0<\delta'<\delta$ 使得 $\|T(z)\|\leqslant C_1$，对于 $z\in\overline{\Delta}_{\delta'}=\{z;\ |\arg z|\leqslant\delta'\}$成立。对 $x\in X$ 和 $\sigma>0$ 我们有

$$R(\sigma+i\tau;\ A)x=\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}\,T(t)x\,dt. \qquad (5.7)$$

由$T(z)$在$\overline{\Delta}_{\delta'}$中的解析性和一致有界性我们可将(5.7)中的积分路径从正实轴移动到任意射线 $\rho e^{i\theta}$，$0<\rho<\infty$和$|\theta|\leqslant\delta'$。对 $\tau>0$，移动积分路径到射线 $\rho e^{-i\delta'}$ 并估计其积分我们得到

$$\|R(\sigma+i\tau;\ A)x\|\leqslant\int_0^\infty e^{-\rho(\sigma\cos\delta'+\tau\sin\delta')}C_1\|x\|\,d\rho$$

$$\leqslant\frac{C_1\|x\|}{\sigma\cos\delta'+\tau\sin\delta'}\leqslant\frac{C_1}{\tau}\|x\|.$$

类似地对于 $\tau<0$ 我们移动积分路径到射线 $\rho e^{i\delta'}$ 并且得到

$\|R(\sigma+i\tau,\ A)\|\leqslant-\dfrac{C}{\tau}$. 因此(5.3)成立。

$(b)\Rightarrow(c)$　因为由假设 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元，所以我们有$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant M_1/Re\lambda$，对于 $Re\lambda>0$ 成立。由(b)，对于 $Re\lambda>0$ 我们有 $\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant C/|Im\lambda|$，因此$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant C_1/|\lambda|$对于 $Re\lambda>0$ 成立。设 $\sigma>0$，将$R(\lambda;\ A)$在 $\lambda=\sigma+i\tau$ 附近展开成 **Taylor** 级数。

$$R(\lambda;\ A)=\sum_{n=0}^{\infty}R(\sigma+i\tau;\ A)^{n+1}(\sigma+i\tau-\lambda)^n. \qquad (5.8)$$

对于$\|R(\sigma+i\tau;\ A)\|\cdot|\sigma+i\tau-\lambda|\leqslant k<1$ 这个级数在 $B(X)$

中收敛。在(5.8)中取 $\lambda = Re\lambda + i\tau$ 并利用(5.3)我们看到对于 $|\sigma - Re\lambda| \leqslant R|\tau|/C$ 级数在 $B(X)$ 中一致收敛。因为 $\sigma > 0$ 和 $k < 1$ 都是任意的，所以 $\rho(A)$ 包含所有满足 $Re\lambda \leqslant 0$ 和 $|Re\lambda|/|Im\lambda| < 1/C$ 的 λ 的集合。特别地，

$$\rho(A) \supset \left\{ \lambda: \ |\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi}{2} + \delta \right\}, \tag{5.9}$$

这里 $\delta = k\arctan\frac{1}{C}$，$0 < k < 1$。而且在这个区域中

$$\|R(\lambda; A)\| \leqslant \frac{C}{1-k} \cdot \frac{1}{|\tau|} \leqslant \frac{\sqrt{C^2+1}}{1-k} \cdot \frac{1}{|\lambda|} = \frac{M}{|\lambda|} \tag{5.10}$$

由假设 $0 \in \rho(A)$，所以A满足(c)。

(c)⇒(d)。如果A满足(c)，由定理1.7.7

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda; A)d\lambda, \tag{5.11}$$

这里Γ是由两射线 $\rho e^{i\theta}$ 和 $\rho e^{-i\theta}$，$0 < \rho < \infty$和$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta$ 组成的路径，Γ是这样定向的使得 $Im\lambda$ 沿着Γ 递增。对 $t > 0$ 积分(5.11)在 $B(X)$中收敛。对 t 微分(5.11)（首先仅为形式地）得

$$T'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda e^{\lambda t} R(\lambda; A)d\lambda. \tag{5.12}$$

但对每一 $t > 0$ 积分(5.12)在 $B(X)$中收敛，因为

$$\|T'(t)\| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Me^{-\rho t\cos\theta}\,d\rho = \left(-\frac{M}{\pi\cos\theta}\right)\frac{1}{t}. \tag{5.13}$$

因此 $T(t)$ 的形式微分被证明是真的，从而 $T(t)$对 $t>0$ 可微和

$$\|AT(t)\| = \|T'(t)\| \leqslant \frac{C}{t} \quad 对于\ t>0\ 成立。 \tag{5.14}$$

$(d)\Rightarrow(a)$。因为对 $t>0$，$T(t)$ 是可微的，由引理 4.5 $\|T^{(n)}(t)\| = \|T'(t/n)^n\| \leqslant \|T'(t/n)\|^n$。利用这一事实并联同(5.14)和 $n!e^n \geqslant n^n$，我们有

$$\frac{1}{n!}\|T^{(n)}(t)\| \leqslant \left(\frac{Ce}{t}\right)^n. \tag{5.15}$$

现在我们考虑幂级数

$$T(z) = T(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T^{(n)}(t)}{n!}(z-t)^n. \tag{5.16}$$

对于 $|z-t| \leqslant k(t/eC)$ 和每一 $k<1$ 级数在 $B(X)$ 中一致收敛。因此 $T(z)$在 $\Delta = \{z: |\arg z| < \arctan 1/Ce\}$中是解析的。因为显然对于实值的 z，$T(z) = T(t)$。所以 $T(z)$ 是 $T(t)$在扇形Δ 上的延拓。根据 $T(z)$的解析性知 $T(z)$满足半群性质，且从(5.16)可见当 $z\to 0$（在 Δ 中）时，$T(z)x\to x$。最后，缩小扇形 Δ 到每一个闭子扇形 $\overline{\Delta_\varepsilon} = \{z: |\arg z| \leqslant \arctan(1/Ce) - \varepsilon\}$我们看到$\|T(t)\|$在 $\overline{\Delta_\varepsilon}$ 中是一致有界的。证毕。

在定理 5.2的叙述中出现的不同常数间有一些关系，这

可通过仔细检验证明中的细节而发现。特别地，象我们在定理叙述之前已经提到的，在(5.4)中的 δ 和在定理(a)部分中的 δ 相同。这容易通过检验积分(5.11)和(5.12)的收敛区域得到。

在定理的(d)⇒(a) 的部分我们已经看到如果 $\|AT(t)\| \leq C/t$，则 $T(t)$能延拓为在一个环绕正实轴的扇形中的一个解析半群。如果常数C 是充分小，则扇形的张角将变成大于 2π，由此 $T(t)$ 是在全平面中解析的。特别地，这蕴涵了 A 是有界的，更确切地我们有

定理 5.3 设 $T(t)$是一个对 $t>0$ 可微的 C_0 半群，A是 $T(t)$的无穷小生成元。如果

$$\limsup_{t\to 0} t\|AT(t)\| < \frac{1}{e}. \tag{5.17}$$

则A是一个有界线性算子和 $T(t)$可以解析地延拓到整个复平面。

证明 由(5.17)得

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{t}{n}\left\| T'\left(\frac{t}{n}\right)\right\| < \frac{1}{e}.$$

因此对于某一 $\delta>0$，级数

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{n!} T^{(n)}(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t)^n}{t^n} \frac{n^n}{n!}\left(\frac{t}{n} T'\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$$

对于$|z-t|/t<1+\delta$ 依一致算子拓扑收敛。但这个定义域作

为一个内点包含原点。因此$\lim_{t\to 0}\|T(t)-I\|=0$。由定理1.1.2这推出$A$是有界的。显然，一个有界线性算子生成一个能解析延拓到整个复平面的半群$T(t)$。

例 5.4 设$X=l_2$，对每一 $a=\{a_n\}\in l_2$，设

$$T(t)a=\{e^{-nt}a_n\} \tag{5.18}$$

显然由(5.18)定义的$T(t)$是X上的一个C_0半群，其无穷小生成元A定义在$D(A)=\{\{a_n\}: \{na_n\}\in l_2\}$上和对$a\in D(A)$

$$A\{a_n\}=\{-na_n\},$$

且

$$\|AT(t)\|=\frac{1}{t}\sup_n(nte^{-nt})=\frac{1}{te}.$$

因此

$$\limsup_{t\to 0}\frac{1}{t}\|AT(t)\|=\frac{1}{e}.$$

因为A是无界的，这个例子表明定理5.3中常数$1/e$是最佳的。

一个C_0半群的无穷小生成元A的特征往往仅包含$R(\lambda; A)$对实值的的估计（如见定理1.3.1和1.5.2），而在一个解析半群的无穷小生成元的特征中我们在定理中用了$R(\lambda; A)$对λ的复值的估计。我们的下一个定理给出一个$R(\lambda; A)$仅依据λ的实值的估计所刻划的解析半群的无穷小生成元的特征。

定理 5.5 设A是一个满足$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$的$C_0$半群$T(t)$的无穷小生成元。则$T(t)$是解析的当且仅当存在常数

$C>0$ 和 $\Lambda\geqslant 0$ 使得

$$\|AR(\lambda,\ A)^{n+1}\|\leqslant\frac{C}{n\lambda^n}\quad 对于\lambda>n\Lambda,\ n=1,\ 2,\ \cdots 成立。$$

(5.19)

证明 首先我们注意，由定理 5.2易得 $T(t)$ 是解析的当且仅当它对 $t>0$ 是可微的和存在常数 $C_1>0$ 和 $\omega_1>0$ 使得

$$\|AT(t)\|\leqslant\frac{C_1}{t}e^{\omega_1 t}\quad 对于\ t>0\ 成立。\tag{5.20}$$

如果A 满足(5.19)，则对 $\lambda>n\Lambda$ 和 $x\in D(A)$我们有

$$\|AR(\lambda;\ A)^{n+1}x\|=\|R(\lambda;\ A)^{n+1}Ax\|\leqslant\frac{C}{n\lambda^n}\|x\|.\tag{5.21}$$

选取 $t<\frac{1}{\Lambda}$和以 $\lambda=\frac{n}{t}$代入(5.21)中我们得到

$$\left\|A\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ A\right)\right)^{n+1}x\right\|=\left\|\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ A\right)^{n+1}Ax\right\|$$

$$\leqslant\frac{C}{t}\|x\|.\ 对于\ x\in D(A)成立。$$

让 $n\to\infty$，由定理1.8.3和A的闭性得

$$\|AT(t)x\|\leqslant\frac{C}{t}\|x\|\quad 对于\ x\in D(A),\ 0<t<\frac{1}{\Lambda}成立。$$

(5.22)

因为$D(A)$在X中稠密和 $AT(t)$是闭的，所以对每一 $x\in X$，

(5.22)成立。因此存在常数 $C_1>0$ 和 $\omega_1>0$ 使得(5.20)成立，从而$T(t)$是解析的。

反之，我们对 λ 微分公式

$$R(\lambda;\ A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

n 次得到

$$R(\lambda;\ A)^{(n)}x=(-1)^n n!R(\lambda;\ A)^{n+1}x$$

$$=(-)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{5.23}$$

用A 作用到(5.23)的两边并用(5.20)估计右端得

$$n!\|AR(\lambda;\ A)^{n+1}x\|\leqslant C\left(\int_0^\infty t^{n-1}e^{-(\lambda-\omega_1)t}dt\right)\|x\|$$

$$=\frac{C_1}{(\lambda-\omega_1)^n}(n-1)!\|x\|.$$

因此对 $\lambda>nA$

$$\|AR(\lambda;\ A)^{n+1}\|\leqslant\frac{C_1}{n\lambda^n}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\omega_1}{An}}\right)^n\leqslant\frac{C_2}{n\lambda^n}.$$

到目前为止在本节所给的解析半群的特征都是基于关于半群的无穷小生成元A 的条件或者关于A 的预解式的条件。一个解析半群的不同类型的特征是基于$T(t)$在其谱半径附近的性态，这就是我们要给出的以下定理。

定理 5.6 对于一个一致有界 C_0 半群 $T(t)$以下条件是等价的

(*a*)　$T(t)$在一个环绕非负实轴的扇形中是解析的。

(*b*)　对每一复数 ζ，$\zeta\neq 1$，$|\zeta|\geqslant 1$ 存在正常数 K 和 δ 使得 $\zeta\in\rho(T(t))$和

$$\|(\zeta I-T(t))^{-1}\|\leqslant K，\text{对于 } 0<t<\delta \text{ 成立。} \tag{5.23}$$

(*c*)　存在一个复数 ζ，$|\zeta|=1$ 及正常数K 和 δ 使得

$$\|(\zeta I-T(t))x\|\geqslant\frac{1}{K}\|x\|，\text{对于 } x\in X,\ 0<t<\delta \text{ 成立。} \tag{5.24}$$

证明　$(a)\Rightarrow(b)$　设$T(t)$在一个环绕非负实轴的扇形中是解析的。由定理5.2和1.7.7 对 $t>0$

$$T(t)=\frac{1}{2xi}\int_{\Gamma'}e^{\lambda t}R(\lambda;\ A)d\lambda,$$

这里 Γ' 是由两射线 $\rho e^{i\theta_1}$，$\frac{\pi}{2}<\theta_1<\pi$，$<\pi$，$\rho\geqslant 1$ 和 $\rho e^{i\theta_2}$，$-\pi<\theta_2<\frac{\pi}{2}$，$\rho\geqslant 1$ 及一条在预解集内连接 $e^{i\theta_1}$ 和 $e^{i\theta_2}$ 的曲线组成。Γ'是这样定向的使得 $Im\lambda$ 沿着 Γ'递增。

作变量代换 $z=\lambda t$，我们得到

$$T(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{z}(zI-tA)^{-1}dz \tag{5.25}$$

给定 $\zeta\neq 1$，$|\zeta|\geqslant 1$，存在 $\delta>0$ 使得当$|z|\leqslant\delta$ 时，$e^{z}\neq\zeta$。对于 $0<t<\delta$ 积分路径 Γ 可以不依赖于 t 的这种选择，使得对所有在 Γ 上和在Γ左边的 z，$e^{z}\neq\zeta$。对已经如此选择的 δ 和 Γ 及 $0<t<\delta$，我们定义

$$B(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{z}(e^{z}-\zeta)^{-1}(zI-tA)^{-1}dz. \tag{5.26}$$

这个积分依一致算子拓扑收敛，因此定义了一个有界线性算子 $B(t)$。因为在 Γ 上我们有 $\|(zI-tA)^{-1}\|\leqslant M_1|z|^{-1}$。所以

$$\|B(t)\|\leqslant\frac{M'}{2\pi}\int_{\Gamma}|z^{-1}e^{z}(e^{z}-\zeta)^{-1}|\cdot|dz|\leqslant M'', \tag{5.27}$$

因为 e^{z} 和 $e^{z}(e^{z}-\zeta)^{-1}$ 在 Γ 上和左边是解析的，所以当 $Re z\to-\infty$时，它们迅速趋于零。又因为 $e^{z}\cdot e^{z}(e^{z}-\zeta)^{-1}=e^{z}+\zeta e^{z}(e^{z}-\zeta)^{-1}$，由 **Dunford-Taylor** 的算子演算我们得到

$$T(t)B(t)=T(t)+\zeta B(t).$$

由此推出

$$(I-B(t))(\zeta I-T(t))=(\zeta I-T(t))(I-B(t))=\zeta I \tag{5.28}$$

因此

$$(\zeta I-T(t))^{-1}=\zeta^{-1}(I-B(t))$$

和

$$\|(\zeta I-T(t))^{-1}\|\leqslant|\zeta|^{-1}(1+M''). \tag{5.29}$$

$(b)\Rightarrow(c)$是平凡的。

$(c)\Rightarrow(a)$。以 $\lambda=-i\alpha$（α是实的）代入(2.3)我们有

$$e^{-it\alpha}T(t)x-x=\int_0^t e^{-is\alpha}T(s)(A-i\alpha I)xds,$$

对于 $x\in D(A)$成立。 (5.30)

因为$\|T(t)\|\leqslant M$，(5.30)推出

$$\|(T(t)-e^{it\alpha}I)x\|\leqslant Mt\|(A-i\alpha I)x\|. \tag{5.31}$$

如果 $e^{\pm it\alpha}=e^{i\theta}=\zeta$，$\theta>0$，则由假设$(c)$我们有

$$K^{-1}\|x\|\leqslant\|(T(t)-e^{\pm i\alpha t}I)x\|\leqslant Mt(A\pm i\alpha I)x\|$$
$$\leqslant M\theta|\alpha|^{-1}\|(A\pm i\alpha I)x\|, \tag{5.32}$$

由此推出

$$\|(A\pm i\alpha I)x\|\geqslant|\alpha|(KM\theta)^{-1}\|x\|, \tag{5.33}$$

因此 $A\pm i\alpha I$ 是一对一的和有闭值域。现在我们将证明它是到上的。因为 A 是一个一致有界 C_0 半群的无穷小生成元，所以$(A-(\varepsilon\pm i\alpha)I)^{-1}$ 存在和$\|(A-(\varepsilon\pm i\alpha)I)^{-1}\|\leqslant M\varepsilon^{-1}$。对每一 $f\in X$，设

$$(A-(\varepsilon\pm i\alpha(I)x_\varepsilon=f \tag{5.34}$$

则 $\|x_\varepsilon\|\leqslant M\varepsilon^{-1}\|f\|$，即 $\varepsilon\|x_\varepsilon\|\leqslant M\|f\|$。这同(5.34)一起推出$\|(A\pm i\alpha I)x_\varepsilon\|\leqslant(M+1)\|f\|$。则从(5.33)我们导出$\|x_\varepsilon\|\leqslant C$。因此

$$\|(A\pm i\alpha I)x_\varepsilon-f\|\leqslant\varepsilon\|x_\varepsilon\|\to 0,\ \text{当}\ \varepsilon\downarrow 0\ \text{时}。 \tag{5.35}$$

结合(5.35)和(5.33)我们看到当 $\varepsilon\to 0$时 x_ε 是一个 Cauchy 网和 $x_\varepsilon\to x$。因此$(A\pm i\alpha I)x=f$。于是$(A\pm i\alpha I)$ 的值域是整个X 和(5.33)推出

$$\|(A\pm i\alpha I)^{-1}\|\leqslant\frac{MK\theta}{|\alpha|}. \tag{5.36}$$

所以由定理5.2(b)这推出$T(t)$可以解析地延拓到一个环绕非负实轴的扇形Δ 内。

推论 5.7 设 $T(t)$是一个 C_0 半群。如果

$$\limsup_{t\downarrow 0}\|I-T(t)\|<2, \tag{5.37}$$

则$T(t)$在一个环绕非负实轴的扇形中是解析的。

证明 由(5.37)存在$\delta>0$和$\varepsilon>0$使得

$$\|I-T(t)\|\leqslant 2-\varepsilon,\ \text{对于}\ 0<t<\delta\ \text{成立。} \tag{5.38}$$

然而

$$\begin{aligned}\|(-I-T(t))x\| &\geqslant 2\|x\|-\|(I-T(t))x\| \\ &\geqslant \varepsilon\|x\|,\ \text{对于}\ 0<t<\delta\ \text{成立}\end{aligned}$$

对于$\zeta=-1$利用定理5.6(c)即推出$T(t)$是解析的，

推论5.7表明$\|I-T(t)\|$在$t=0$的某种性态能导出$T(t)$在一个环绕非负实轴的角域中的解析性。这自然要问是否$T(t)$的解析性蕴涵(5.37)。解答一般是否定的，然而在某种限制性假设下它是对的，这方面的一个简单结果是

推论 5.8 设$T(t)$是一个一致凸 Banach 空间X中的收缩半群，则

$$\limsup_{t\downarrow 0}\|I-T(t)\|<2. \tag{5.39}$$

证明 因为$T(t)$是一个收缩半群，所以$\|I+T(t)\|\leqslant 2$，如果

$$\lim_{t\downarrow 0}\|I-T(t)\|=2$$

则存在序列x_n和t_n使得$\|x_n\|=1$，$t_n\to 0$和

$$\|(I-T(t_n))x_n\|\geqslant 2-\frac{1}{n} \tag{5.40}$$

因为$\|T(t_n)x_n\|\leqslant 1$，所以由(5.40)和X的一致凸性

$$\|(I+T(t_n))x_n\|\to 0,\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时，} \tag{5.41}$$

但这和定理5.6(b)矛盾。因此(5.39)必成立。

§2.6 闭算子的分数幂

在本节我们定义某种无界线性算子的分数幂并研究它们的一些性质。我们仅集中讨论$-A$是一个解析半群的无穷小生成元的算子A的分数幂，本节结果将用于半线性初值问题的解的研究。

为了给出分数幂的定义我们将作下面的假设。

假设 6.1 设A是一个稠定义的闭线性算子，

$$\rho(A)\supset\Sigma^{+}=\{\lambda;\ 0<\omega<|\arg\lambda|\leqslant\pi\}\cup V, \tag{6.1}$$

这里V是零的一个邻域，并且

$$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant\frac{M}{1+|\lambda|}, \qquad \lambda\in\Sigma^{+}. \tag{6.2}$$

如果$M=1$和$\omega=\frac{\pi}{2}$，则$-A$是一个C_0半群的无穷小生成元。如果$\omega<\frac{\pi}{2}$，则由定理 5.2知$-A$是一个解析半群的无穷小生成元。为方便起见，假设$0\in\rho(A)$，因此零的一个邻域V在$\rho(A)$中。我们在本节将得到的关于分数幂的大部分结果即使$0\notin\rho(A)$也仍然成立。

对于满足假设6.1的算子A和$\alpha>0$我们定义

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}z^{-\alpha}(A-zI)^{-1}dz, \tag{6.3}$$

这里路径 C 取在 A 的预解集中，对于 $\omega<\theta<\pi$，它从 $\infty e^{i\theta}$ 变到$\infty e^{-i\theta}$，并避开负实轴和原点，而且使得 $z^{-\alpha}$ 对于正实值的 z 取正值。对每个 $\alpha>0$积分(6.3)依一致算子拓扑收敛，因此它定义了一个有界线性算子$A^{-\alpha}$。如果 $\alpha=n$，则被积函数在 Σ^+中是解析的，并且容易验证积分路径 C 能变成环绕原点的一个小园周。然后由残数定理推出积分等于 A^{-n}。因此对于正整数的 α 定义6.3和$(A^{-1})^n$ 的古典定义相吻合。

对于 $0<\alpha<1$ 我们可以改变积分路径 C 成为负实轴的上边，并得到

$$A^{-\alpha}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}(tI+A)^{-1}dt,\quad 0<\alpha<1. \tag{6.4}$$

如果 $\omega<\frac{\pi}{2}$，即如果$-A$是一个解析半群 $T(t)$的无穷小生成元，我们还获得 $A^{-\alpha}$ 的另一个表示。这个表示非常有用，因此在本节的剩下部分，除特别声明外，我们总假设 $\omega<\frac{\pi}{2}$。在这种情况根据假设6.1，$0\in\rho(A)$，并存在一个常数$\delta>0$使得$-A+\delta I$ 仍然是一个解析半群的无穷小生成元。这蕴涵了以下估计：

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{-\delta t}, \tag{6.5}$$

$$\|AT(t)\|\leqslant M_1t^{-1}e^{-\delta t}, \tag{6.6}$$

$$\|A^mT(t)\|\leqslant M_mt^{-m}e^{-\delta t}, \tag{6.7}$$

前两个估计是第 5 节结果的简单推论，而(6.7)从(6.6)得到。因为

$$\|A^mT(t)\| = \left\|\left(AT\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m\right\| \leqslant \left\|AT\left(\frac{t}{m}\right)\right\|^m$$

$$\leqslant (M_1 t^{-1} e^{-\delta t/m})^m = M_m t^{-m} e^{-\delta t}.$$

另外，我们从(6.5)得知

$$(tI + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-st}\, T(s)\, ds \tag{6.8}$$

依一致算子拓扑对 $t \geqslant 0$ 一致收敛。将(6.8)代入(6.4)并利用 **Fubini** 定理我们有

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(\int_0^\infty e^{-st}\, T(s)\, ds\right)dt$$

$$= \frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty T(s)\left(\int_0^\infty t^{-\alpha} e^{-st}\, dt\right)ds$$

$$= \frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi}\left(\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u}\, du\right)\int_0^\infty s^{\alpha-1}\, T(s)\, ds.$$

因为

$$\int_0^\infty u^{-\alpha} e^{-u} du = \frac{\pi}{\sin\ \pi\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)},$$

最后我们得到

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t)\, dt. \tag{6.9}$$

这里对每个 $\alpha > 0$ 积分依一致算子拓扑收敛。在 $\omega < \frac{\pi}{2}$ 的情形，即 $-A$ 是一个解析半群的无穷小生成元，我们将以(6.9)

作为 $\alpha>0$ 时 $A^{-\alpha}$ 的定义，并且我们定义 $A^{-0}=I$。

引理 6.2 对于 α, $\beta\geqslant 0$

$$A^{-(\alpha+\beta)}=A^{-\alpha}A^{-\beta}. \tag{6.10}$$

证明

$$A^{-\alpha}A^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}s^{\beta-1}T(t)T(s)dtds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\int_0^{\infty}(u-t)^{\beta-1}T(u)dudt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{u}t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}dt\right)T(u)du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{1}\nu^{\alpha-1}(1-\nu)^{\beta-1}d\nu\int_0^{\infty}u^{\alpha+\beta-1}T(u)du$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{\infty}u^{\alpha+\beta-1}T(u)du=A^{-(\alpha+\beta)}.$$

引理 6.3 存在常数C使得

$$\|A^{-\alpha}\|\leqslant C,\ \text{对于}\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\ \text{成立。} \tag{6.11}$$

证明 对于 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$，(6.11)是明显的。对于 $0<\alpha<1$我们利用(6.4)得到

$$\|A^{-\alpha}\|\leqslant\left\|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^1 t^{-\alpha}(tI+A)^{-1}dt\right\|$$

$$+\left\|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_1^{\infty}t^{-1-\alpha}\,t(tI+A)^{-1}dt\right\|$$

设$\|(tI+A)^{-1}\|\leqslant C_0$ 对于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 成 立。由假设6.1我们有

$\|t(tI+A)^{-1}\|\leqslant C_1$对于 $t\geqslant 1$ 成立。因此

$$\|A^{-\alpha}\|\leqslant\left|\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\right|C_0+\left|\frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi\alpha}\right|C_1\leqslant C.$$

引理 6.4 对每一 $x\in X$ 我们有

$$\lim_{\alpha\to 0} A^{-\alpha}x=x. \tag{6.12}$$

证明 首先假设 $x\in D(A)$ 。因为 $0\in\rho(A)$，我们有 $x=A^{-1}y$ 对于某一 $y\in X$ 成立。因此

$$A^{-\alpha}x-x=A^{-(1+\alpha)}y-A^{-1}y=\int_0^\infty\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right)T(t)y\ dt.$$

从而利用(6.5)得到

$$\|A^{-\alpha}x-x\|\leqslant C_1\int_0^k\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-1\right|e^{-\delta t}\,dt+C_2\int_k^\infty te^{-\delta t}\,dt \tag{6.13}$$

对于每一 $k>0$ 和 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 成立。给定 $\varepsilon>0$，我们首先取如此大使得(6.13) 的右边的第二项小于 $\varepsilon/2$。于是对 $x\in D(A)$我们有 $A^{-\alpha}x\to x$，当 $\alpha\to 0$ 时。因为 $D(A)$在 X 中稠密，所以由引理6.3 $A^{-\alpha}$ 是一致有界的。故(6.12)对一切 $x\in X$成立。

综合以上结果我们有

推论 6.5 如果 A 满足假设6.1，其中 $\omega<\frac{\pi}{2}$，则 A^{-t} 是一个有界线性算子的 C_0 半群。

引理 6.6 由(6.9)定义的 $A^{-\alpha}$ 是一对一的。

证明 显然 A^{-1} 是一对一的，因此对每一整数 $n\geqslant 1$，A^{-n} 是一对一的。设 $A^{-\alpha}x=0$。取 $n\geqslant\alpha$，则 $A^{-n}x=A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x=0$。这就推出 $x=0$。因此 $A^{-\alpha}$ 是一对一的。

定义 6.7 设 A 满足假设6.1，其中 $\omega<\frac{\pi}{2}$。对每一 $\alpha>0$ 我们定义

$$A^{\alpha}=(A^{-\alpha})^{-1}. \tag{6.14}$$

对 $\alpha=0$，定义 $A^{\alpha}=1$。

在本节的其余部分我们假设A满足假设6.1，其中 $\omega<\frac{\pi}{2}$。在下一个定理中我们集中了 A^{α} 的一些简单性质。

定理 6.8 设 A^{α} 由定义6.7所定义，则

(*a*) A^{α} 是闭算子具有定义域 $D(A^{\alpha})=R(A^{-\alpha})=A^{-\alpha}$ 的值域。

(*b*) $\alpha\geqslant\beta>0$ 蕴涵 $D(A^{\alpha})\subset D(A^{\beta})$。

(*c*) 对每一 $\alpha\geqslant 0$，$\overline{D(A^{\alpha})}=X$。

(*d*) 如果 α，β 是实的，则

$$A^{\alpha+\beta}x=A^{\alpha}A^{\beta}x. \tag{6.15}$$

对每一 $x\in D(A^{\gamma})$成立，这里 $\gamma=\max\{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\}$。

证明 对$\alpha\leqslant 0$，A^{α} 是有界的，因此(a)是显然的，如果 $\alpha>0$，A^{α}是可逆的，因此$0\in\rho(A^{\alpha})$。这就推出A^{α}是闭的。对于$\alpha\geqslant\beta$ 根据引理6.2我们有$A^{-\alpha}=A^{-\beta}A^{-(\alpha-\beta)}$。因此$R(A^{-\alpha})\subset R(A^{-\beta})$，由此推出($b$)。因为由定理1.2.7对每一 $n=1,2,\cdots$ 有$\overline{D(A^{n})}=X$ 和由(b)对 $\alpha\leqslant n$ 有 $D(A^{\alpha})\supset D(A^{n})$，所以我们有(c)成立。最后 ($d$) 是 A^{α} 的定义和引理 6.2 的一个简

单推论。作为例子，若 $\alpha>0$，$\beta>0$ 和 $x\in D(A^\alpha A^\beta)$，则 $x\in D(A^\beta)$ 和 $A^\beta x\in D(A^\alpha)$。设 $y=A^\alpha A^\beta x$，则 $A^\beta x=A^{-\alpha}y$ 和 $x=A^{-\beta}A^{-\alpha}y={}^{-(\alpha+\beta)}y$。因此 $x\in D(A^{\alpha+\beta})$ 和 $A^{\alpha+\beta}x=y=A^\alpha A^\beta x$。类似地若 $x\in D(A^{\alpha+\beta})$，我们有 $x\in D(A^\alpha A^\beta)$ 和 $A^{\alpha+\beta}=A^\alpha A^\beta$。

在定义 6.7 中我们是用间接的方式定义 A^α。对于 $x\in D(A)\subset D(A^\alpha)$，$0<\alpha<1$，我们有关于 $A^\alpha x$ 的如下直接公式

定理 6.9 设 $0<\alpha<1$，如果 $x\in D(A)$，则

$$A^\alpha x=\frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}xdt. \tag{6.16}$$

证明 我们有 $0<1-\alpha<1$。因此由(6.4)

$$A^{\alpha-1}x=\frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(tI+A)^{-1}xdt. \tag{6.17}$$

(6.17) 右端的被积函数对每一 $t>0$ 是在 $D(A)$ 中和 $t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x$ 在$[0,\infty)$上是可微的。因为在 $t=0$ 附近，$\|A(tI+A^{-1})\|$ 是一致有界的，而在 $t=\infty$ 附近 $\|t^{\alpha-1}A(tI+A)^{-1}x\|\leqslant t^{\alpha-2}M\|Ax\|$。最后如果 $x\in D(A^\alpha)$，则$A^{\alpha-1}x\in D(A)$，并从A 的闭性我们导出

$$A^\alpha x=A(A^{\alpha-1}x)=\frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha A(tI+A)^{-1}xdt.$$

注 由定理6.9的证明显然(6.16)对一切 $x\in D(A^\gamma)$ 成立，这里 $\gamma>\alpha$。

定理 6.10 设$0<\alpha<1$，则存在常数 $C_0>0$ 使得对一切

$x\in D(A)$和 $\rho>0$，我们有

$$\|A^{\alpha}x\|\leqslant C_0(\rho^{\alpha}\|x\|+\rho^{\alpha-1}\|Ax\|) \tag{6.18}$$

和

$$\|A^{\alpha}x\|\leqslant 2C_0\|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^{\alpha}. \tag{6.19}$$

证明 根据我们对 A 的假设，存在常数 M 对每一 $t>0$ 满足$\|(tI+A)^{-1}\|\leqslant M/t$。如果 $x\in D(A)$，则由定理6.9

$$\|A^{\alpha}x\|\leqslant\left|\frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi}\right|\int_0^{\rho}t^{\alpha-1}\|A(tI+A)^{-1}\|\cdot\|x\|dt$$

$$+\left|\frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi}\right|\int_{\rho}^{\infty}t^{\alpha-1}\|(tI+A)^{-1}\|\cdot\|Ax\|dt$$

$$\leqslant\left|\frac{\sin\ \pi\alpha}{\pi\alpha}\right|(1+M)\rho^{\alpha}\|x\|$$

$$+\left|\frac{\sin\pi(1-\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\right|M\rho^{\alpha-1}\|Ax\|$$

$$\leqslant C_0(\rho^{\alpha}\|x\|+\rho^{\alpha-1}\|Ax\|).$$

对于 $x=0$，(6.19)是显然的。对于 $x\neq0$，(6.19)由(6.18)取 $\rho=\|Ax\|/\|x\|$得到。

推论 6.11 设B 是一个满足 $D(B)\supset D(A^{\alpha})$的闭线性算子，$0<\alpha\leqslant1$，则

$$\|Bx\|\leqslant C\|A^{\alpha}x\|，对一切 x\in D(A^{\alpha})成立， \tag{6.20}$$

并且存在常数 C_1 使得对一切 $\rho>0$ 和 $x\in D(A)$

$$\|Bx\|\leqslant C_1(\rho^{\alpha}\|x\|+\rho^{\alpha-1}\|Ax\|). \tag{6.21}$$

证明 考虑闭算子 $BA^{-\alpha}$。因为 $D(B)\supset D(A^{\alpha})$，所以 $BA^{-\alpha}$ 定义在整个 X 上，并根据闭图象定理它是有界的。这

证明了(6.20)。对于 $x\in D(A)$ ，(6.21)是(6.20)和(6.18)的一个直接推论。

我们在下一个定理中给出 $D(B)\supset D(A^\alpha)$ 的一个充分条件。

定理 6.12 设 B 是一个满足 $D(B)\supset D(A)$的闭线性算子。如果对某 γ，$0<\gamma<1$ 和每一 $\rho\geqslant\rho_0>0$ 我们有

$$\|Bx\|\leqslant C(\rho^\gamma\|x\|+\rho^{\gamma-1}\|Ax\|) \quad \text{对于 } x\in D(A) \text{ 成立，} \tag{6.22}$$

则

$$D(B)\supset D(A^\alpha)\text{，对一切 } \gamma<\alpha\leqslant 1 \text{ 成立。} \tag{6.23}$$

证明 设 $x\in D(A^{1-\alpha})$，则 $A^{-\alpha}x\in D(A)\subset D(B)$。因为 B 是闭的，所以积分

$$BA^{-\alpha}x=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}BT(t)x\,dt$$

是收敛的。但

$$\|BA^{-\alpha}\|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^\delta t^{\alpha-1}\|BT(t)x\|\,dt+\int_\delta^\infty t^{\alpha-1}\|BT(t)x\|dt\right). \tag{6.24}$$

因为 $T(t)$是一个解析半群，所以对一切 $t>0$，$T(t)x\in D(A)$。选取 $\delta=\rho_0{}^{-1}$，在(6.24)右端的第一项积分中对于 $\rho=t^{-1}$ 和在第二项积分中对于 $\rho=\rho_0$ 应用 (6.22)，并利用 (6.5) 和 (6.6)，我们得到$\|BA^{-\alpha}x\|\leqslant C\|x\|$。这对所有 $x\in D(A^{1-\alpha})$ 成立。因为 $BA^{-\alpha}$ 是闭的和 $D(A^{1-\alpha})$ 在 X 中稠密，所以 $\|BA^{-\alpha}x\|\leqslant C\|x\|$对一切 $x\in X$成立。因而 $D(B)\supset D(A^\alpha)$。

能够证明如果 A 满足假设6.1，而对 ω 没有任何限制，

则当 $\alpha\leqslant\frac{1}{2}$时，$-A^\alpha$ 是一个有界线性算子 C_0 半群的无穷小生成元。如果 $\omega<\frac{\pi}{2}$，如我们所假设的，则对所有 $0<\alpha\leqslant 1$，$-A^\alpha$ 是一个解析半群的无穷小生成元。

定理 6.13 设 $-A$ 是一个解析半群 $T(t)$的无穷小生成元。如果 $0\in\rho(A)$，则

(a) $T(t)$：$X\to D(A^\alpha)$对一切 $t>0$ 和 $\alpha\geqslant 0$ 成立。

(b) 对每一 $x\in D(A^\alpha)$，我们有 $T(t)A^\alpha x=A^\alpha T(t)x$。

(c) 对每一 $t>0$，算子 $A^\alpha T(t)$是有界的，且

$$\|A^\alpha T(t)\|\leqslant M_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}. \tag{6.25}$$

(d) 设 $0<\alpha\leqslant 1$ 和 $x\in D(A^\alpha)$，则

$$\|T(t)x-x\|\leqslant C_\alpha t^\alpha\|A^\alpha x\|. \tag{6.26}$$

证明 我们关于A 的假设蕴涵A 对 $\omega<\frac{\pi}{2}$满足假设 6.1，因此对于 $\alpha\geqslant 0$，A^α 存在。因为$T(t)$是解析的，我们有$T(t)$：$X\to\bigcap_{n=0}^{\infty}D(A^n)\subset D(A^\alpha)$，对每一 $\alpha\geqslant 0$成立。这就证明了(a)。

设 $x\in D(A^\alpha)$，则 $x=A^{-\alpha}y$ 对某 $y\in X$成立和

$$\begin{aligned}T(t)x=T(t)A^{-\alpha}y&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)T(t)y\,ds\\&=A^{-\alpha}T(t)y=A^{-\alpha}T(t)A^\alpha x\end{aligned}$$

因此(b)成立。

因为 A^α 是闭的，所以 $A^\alpha T(t)$ 亦然。由(a)，$A^\alpha T(t)$是处处有定义的，因此由闭图象定理 $A^\alpha T(t)$ 是有界的。设

$n-1<\alpha\leqslant n$，则利用(6.7)我们有

$$\|A^{\alpha}T(t)\| = \|A^{\alpha-n}A^{n}T(t)\|$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} s^{n-\alpha-1}\|A^{n}T(t+s)\|ds$$

$$\leqslant \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{\infty} s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n}e^{-\delta(t+s)}\,ds$$

$$\leqslant \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)t^{\alpha}}\int_0^{\infty} u^{n-\alpha-1}(1+u)^{-n}\,du$$

$$= \frac{M_{\alpha}}{t^{\alpha}}e^{-\delta t}.$$

最后

$$\|T(t)x-x\| = \left\|\int_0^t AT(s)xds\right\|$$

$$= \left\|\int_0^t A^{1-\alpha}T(s)A^{\alpha}xds\right\|$$

$$\leqslant C\int_0^t s^{\alpha-1}\|A^{\alpha}x\|ds$$

$$= C_{\alpha}\,t^{\alpha}\|A^{\alpha}x\|$$

第三章　扰动和逼近

§3.1　有界线性算子的扰动

定理 1.1　设 X 是 Banach 空间，A 是 X 上满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 B 是 X 上有界线性算子，则 $A+B$ 是 X 上一个满足 $\|S(t)\|\leqslant Me^{(\omega+M\|B\|)t}$ 的 C_0 半群 $S(t)$ 的无穷小生成元。

证明　由引理 1.5.1 和定理 1.5.3 存在 X 上的范数 $|\cdot|$ 使得对一切 $x\in X$，$\|x\|\leqslant|x|\leqslant M\|x\|$，$|T(t)|\leqslant e^{\omega t}$ 和对满足 $\lambda>\omega$ 的实数 λ，$|R(\lambda;A)|\leqslant(\lambda-\omega)^{-1}$。于是对 $\lambda>\omega+|B|$，有界算子 $BR(\lambda;A)$ 满足 $|BR(\lambda;A)|<1$。因此对于 $\lambda>\omega+|B|$，$I-BR(\lambda;A)$ 是可逆的。令

$$R=R(\lambda;A)(I-BR(\lambda;A))^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}R(\lambda;A)[BR(\lambda;A)]^k \quad (1.1)$$

则

$$\begin{aligned}(\lambda I-A-B)R&=(I-BR(\lambda;A))^{-1}\\&\quad-BR(\lambda;A)(I-BR(\lambda;A))^{-1}=I\end{aligned}$$

和

$$R\cdot(\lambda I-A-B)x=R(\lambda;A)(\lambda I-A-B)x$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} R(\lambda;A)[BR(\lambda;A)]^k(aI-A-B)x$$

$$=x-R(\lambda;A)Bx+\sum_{k=1}^{\infty}[R(\lambda;A)B]^k x$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}[R(\lambda;A)B]^k x=x$$

对一切 $x\in D(A)$ 成立。因此 $A+B$ 的预解式对 $\lambda>\omega+|B|$ 存在，并且就是算子 R。此外

$$|(\lambda I-A-B)^{-1}|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}R(\lambda;A)[BR(\lambda;A)]^k\right|$$

$$\leqslant(\lambda-\omega)^{-1}(1-|BR(\lambda;A)|)^{-1}$$

$$\leqslant(\lambda-\omega-|B|)^{-1}.$$

由推论 1.3.8，$A+B$ 是一个满足 $|S(t)|\leqslant e^{(\omega+|B|)t}$ 的 C_0 半群 $S(t)$ 的无穷小生成元。回到 X 的原有范数 $\|\cdot\|$ 我们有

$$\|S(t)\|\leqslant Me^{(\omega+M\|B\|)t}.$$

现在我们对由 A 生成的半群 $T(t)$ 和由 $A+B$ 生成的半群 $S(t)$ 间的关系感兴趣。为此我们考虑算子 $H(s)=T(t-s)S(s)$，对 $x\in D(A)=D(A+B)$，$s\to H(s)x$ 是可微的和 $H'(s)x=T(t-s)BS(s)x$，对 $H'(s)x$ 从 0 到 t 积分得

$$S(t)x=T(t)x+\int_0^t T(t-s)BS(s)ds, \text{ 对于 } x\in D(A) \text{ 成立} \quad (1.2)$$

因为 (1.2) 两边的算子是有界的，所以 (1.2) 对一切 $x\in X$ 成立。因此半群 $S(t)$ 是积分方程 (1.2) 的一个解。对于该积分方程我们有

命题 1.2 设 $T(t)$ 是满足 $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群，B 是一个有界算子。则在 X 上存在唯一的有界算子 $V(t)$，$t \geqslant 0$，使得对每一 $x \in X$，$t \to V(t)x$ 在 $[0, \infty)$ 上连续，并且

$$V(t)x = T(t)x + \int_0^t T(t-s)BV(s)ds, \text{ 对于 } x \in X \text{ 成立。} \tag{1.3}$$

证明 命

$$V_0(t) = T(t), \tag{1.4}$$

并归纳定义 $V_n(t)$

$$V_{n+1}(t)x = \int_0^t T(t-s)BV_n(s)xds, \quad x \in X, \quad n \geqslant 0. \tag{1.5}$$

从这定义，显然 $t \to V_n(t)x$ 对 $x \in X$，$t \geqslant 0$ 和每一 $n \geqslant 0$ 连续。以下我们用归纳法证明

$$\|V_n(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \frac{M^n \|B\|^n t^n}{n!} \tag{1.6}$$

事实上，对 $n=0$，由我们对 $T(t)$ 的假设和 $V_0(t)$ 的定义知(1.6)成立。假设(1.6)对 n 成立，则由(1.5)我们有

$$\|V_{n+1}(t)\| \leqslant \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \|B\| Me^{\omega s} \frac{M^n \|B\|^n s^n}{n!} ds$$

$$= Me^{\omega t} \frac{M^{n+1} \|B\|^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}$$

因此 (1.6) 对 $n > 0$ 成立。定义

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \tag{1.7}$$

由(1.6)，级数(1.7)依一致算子拓扑在有界区间上一致收敛。因此 $t\to V(t)x$ 对每一 $x\in X$ 是连续的。此外，根据(1.4)和(1.5)，对每一 $x\in V$，$V(t)x$ 满足方程(1.3)。这结束了存在性的证明。为了证明唯一性，设 $U(t)$，$t\geqslant 0$ 是一族有界算子，$t\to U(t)x$ 对每一 $x\in X$ 连续，且

$$U(t)x=T(t)x+\int_0^t T(t-s)BU(s)xds,\ \text{对于}\ x\in X\ \text{成立}. \quad (1.8)$$

从(1.2)减去(1.8)，并估计差得

$$\|(V(t)-U(t))x\|\leqslant\int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|B\|\|(V(s)-U(s))x\|ds. \quad (1.)$$

但由 Gronwall 不等式推出 $\|(V(t)-U(t))x\|=0$，对一切 $t\geqslant 0$ 成立。因此 $V(t)=U(t)$。

由命题 1.2 和由 $A+B$ 生成的半群 $S(t)$ 满足积分方程(1.2)的事实我们立即得到以下 $S(t)$ 用 $T(t)$ 给出的明确表达式

$$S(t)=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(t) \quad (1.10)$$

其中 $S_0(t)=T(t)$，

$$S_{n-1}(t)x=\int_0^t T(t-s)BS_n(s)xds,\ x\in X, \quad (1.11)$$

且在(1.10)中的收敛是依一致算子拓扑的。

关于 $T(t)$ 和 $S(t)$ 间的差我们有

推论 1·3 设 A 是满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。又设 B 是有界算子和 $S(t)$ 是由 $A+B$ 生成

的 C_0 半群，则

$$\|S(t)-T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}(e^{M\|B\|t}-1) \tag{1.12}$$

证明 由积分方程(1.2)和定理 1.1 我们有

$$\begin{aligned}\|S(t)x-T(t)x\|&\leqslant\int_0^t\|T(t-s)\|\cdot\|B\|\cdot\|S(t)\|\cdot\|x\|ds\\&\leqslant M^2e^{\omega t}\|B\|\int_0^t e^{M\|B\|s}\|x\|ds\\&=Me^{\omega t}(e^{M\|B\|t}-1)\|x\|.\end{aligned}$$

本节主要结果定理 1.1 表明一个有界线性算子 B 加到一个 C_0 半群的无穷小生成元 A 上不破坏 A 的这种性质。这自然要问当 A 被一个有界线性算子 B 扰动时，由 A 生成的半群 $T(t)$ 的哪些特殊性质被保持。不难指出如果 A 是一个紧或解析半群的无穷小生成元，则 $A+B$ 亦然。这里我们将只证明关于紧半群的论述。关于解析半群的论述将由下一节的结果（见推论 2.2）推出。

命题 1.4 设 A 是一个紧 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元，B 是一个有界算子，则 $A+B$ 是一个紧 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。

证明 由定理 2.3.3 知 $T(t)$ 对 $t>0$ 依一致算子拓扑连续和对 $\lambda\in\rho(A)$，$R(\lambda;A)$ 是紧的。因为

$$R(\lambda;A+B)=\sum_{k=0}^{\infty}R(\lambda;A)[BR(\lambda;A)]^k \tag{1.13}$$

和对 $\lambda>\omega$，$\|R(\lambda;A)\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-1}$，所以对 $\lambda>\omega+M\|B\|+1$，(1.13) 在 $B(X)$ 中收敛。又因为 (1.13) 右端的每一项是紧的，所以对 $\lambda>\omega+M\|B\|+1$，$R(\lambda;A+B)$ 也是紧的。由预解恒等式，$R(\lambda;A+B)$对一切 $\lambda\in\rho(A+B)$ 是紧的。为了证

明 $S(t)$ 是一个紧半群，由定理 2.3.3 只须证明 $S(t)$ 对 $t>0$ 是依一致算子拓扑连续的。为此我们注意如果 $T(t)$ 对 $t>0$ 是依一致算子拓扑连续的，则每一个由(1.11)定义的算子 $S_n(t)$ 对 $t>0$ 是依一致算子拓扑连续的。因为 $S(t)$ 是 $\sum_{j=0}^{n} S_j(t)$ 依一致算子拓扑的一致极限（在 t 的有界集上），所以 $S(t)$ 对 $t>0$ 是依一致算子拓扑连续的。

并非半群 $T(t)$ 的所有性质对其无穷小生成元的有界扰动都保持。例如我们已经知道如果 A 是一个半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，而 $T(t)$ 对 $t\geqslant t_0>0$ 是依一致算子拓扑连续的，或者对 $t\geqslant t_0>0$ 是可微的，或者对 $t\geqslant t_0>0$ 是紧的，则 $A+B$ 生成的半群 $S(t)$ 不必有相应的性质，其中 B 是一个有界算子。

§3.2 解析半群的无穷小生成元的扰动

定理 2.1 设 A 是一个解析半群的无穷小生成元，B 是一个满足 $D(B)\supset D(A)$ 和

$$\|Bx\|\leqslant a\|Ax\|+b\|x\|,\ 对于\ x\in D(A)\ 成立。\qquad (1.2)$$

的闭线性算子。则存在正数 δ 使得当 $0\leqslant a\leqslant\delta$ 时，$A+B$ 是一个解析半群的无穷小生成元。

证明 首先假设由 A 生成的半群 $T(t)$ 是一致有界的。则对某 $\omega>0$，$\rho(A)\supset\Sigma=\left\{\lambda;\ |\arg|\leqslant\frac{\pi}{2}+\omega\right\}$ 和在 Σ 中，$\|R(\lambda;A)\|\leqslant M|\lambda|^{-1}$。考虑有界线性算子 $BR(\lambda;A)$。由(2.1)

对一切 $x\in X$

$$\|BR(\lambda;A)x\|\leqslant a\|AR(\lambda;A)x\|+b\|R(\lambda;A)x\|$$

$$\leqslant a\ (M+1)\|x\|+\frac{bM}{|\lambda|}\ \|x\|. \qquad (2.2)$$

选取 $\delta=\frac{1}{2}(1+M)^{-1}$ 和 $|\lambda|>2bM$ 我们有 $\|BR(\lambda;A)\|\leqslant 1$。因此算子 $I-BR(\lambda;A)$ 是可逆的。简单计算表明

$$(\lambda I-(A+B))^{-1}=R(\lambda;A)(I-BR(\lambda;A))^{-1}. \qquad (2.3)$$

因此对 $|\lambda|>2bM$ 和 $|arg\lambda|\leqslant\frac{\pi}{2}+\omega$ 我们从 (2.3) 获得

$$\|R(\lambda;A+B)\|\leqslant M'\ |\lambda|^{-1}. \qquad (2.4)$$

由此推出 $A+B$ 是一个解析半群的无穷小生成元。

如果 $T(t)$ 不是一致有界的，设 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$。考虑由 $A_o=A-\omega I$ 生成的半群 $e^{-\omega t}T(t)$。由(2.1)我们有

$\|Bx\|\leqslant a\|A_o x\|+(a\omega+b)\|x\|$，对于 $x\in D(A)$ 成立。

因此由证明的第一部分，如果 $0<a<\delta$，则 $A_0+B=A+B-\omega I$ 是一个解析半群的无穷小生成元。由此推出 $A+B$ 也是一个解析半群的无穷小生成元。

注　在定理 2.1 中，由 $A+B$ 生成的半群 $S(t)$ 满足 $\|S(t)\|\leqslant Me^{(\omega+\Lambda(b))t}$，这里 $\lim\limits_{b\to 0}\Lambda(b)=0$。

由定理 2.1 中 $a=0$ 的情况，我们得到

推论 2.2　设 A 是一个解析半群的无穷小生成元。如果 B 是一个有界线性算子，则 $A+B$ 是一个解析半群的无穷小生成元。

从定理 2.1 的证明易得出以下推论。

推理 2.3 设 A 是一个一致有界解析半群的无穷小生成元。设 B 是一个满足 $D(B)\supset D(A)$ 和

$$\|Bx\|\leqslant a\|Ax\|,\ 对于\ x\in D(A)成立。\qquad (2.5)$$

的闭算子。则存在常数 δ 使得当 $0\leqslant a\leqslant\delta$ 时，$A+B$ 是一个一致有界解析半群的无穷小生成 元。

推理 2.4 设 A 是一个解析半群的无穷小生成元。设 B 是 闭的和对某 $0<\alpha<1$，$D(B)\supset B(A^{\alpha})$，则 $A+B$ 是一个解析半群的无穷小生成元。

证明 因为 $D(B)\supset D(A^{\alpha})$，显然我们有 $D(B)\supset D(A)$。由推论 2.6 得

$$\|Bx\|\leqslant C(\rho^{\alpha}\|x\|+\rho^{\alpha-1}\|Ax\|),对于x\in D(A)和\ \rho>0成立.\ (2.6)$$

选取 $\rho>0$ 充分大使得 $C\rho^{\alpha-1}<\delta$，这里 δ 是在定 理 2.1 的叙述中所给定的常数，则所证结果立刻从定理 2.1 推出。

§3.3 收缩半群的无穷小生成元的扰动

我们从一个定义开始。

定义 3.1 一个耗散算子 A 满足 $R(I-A)=X$ 时称 为 m 一耗散的。

如果 A 是耗散的，则对一切 $\mu>0$，μA 亦然。因此如果 A 是 m－耗散的，则对一切 $\lambda>0$，$R(\lambda I-A)=X$。用 m－耗散算子的术语 Lumer—Phillips 定理能重述为：一个稠定义的算子 A 是一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元当且仅当 它是 m－耗散的。

本节主要结果是以下关于 $m-$ 耗散算子的扰动定理。

定理 3.2 设 A 和 B 是 X 中的线性算子，使得 $D(B) \supset D(A)$ 和对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$，$A+tB$ 是耗散的。如果

$$\|Bx\| \leqslant \alpha\|Ax\| + \beta\|x\|, \text{ 对于 } x \in D(A) \text{ 成立，} \tag{3.1}$$

这里 $0 \leqslant \alpha < 1$，$\beta \geqslant 0$，且对某一 $t_0 \in [0, 1)$，$A+t_0B$ 是 $m-$ 耗散的，则 $A+tB$ 对一切 $t \in [0, 1]$ 是 $m-$ 耗散的。

证明 我们将指出。如果 $A+t_0B$ 是 $m-$ 耗散的，则存在与 t_0 无关的常数 $\delta > 0$，使得对一切满足 $|t-t_0| \leqslant \delta$ 的 $t \in [0, 1]$，$A+tB$ 是 $m-$耗散的。于是在 $[0, 1]$ 上通过有限次扩大这种长度为 δ 的 $m-$ 耗散区间即得我们的结果。

假设对某 $t_0 \in [0,1]$，$A+t_0B$ 是 $m-$ 耗散的，则 $I-(A+t_0B)$ 是可逆的。用 $R(t_0)$ 表示 $(I-(A+t_0B))^{-1}$，我们有 $\|R(t_0)\| \leqslant 1$。现在我们证明算子 $BR(t_0)$ 是一个有界线性算子。由 (3.1) 和三角不等式对 $x \in D(A)$ 我们有

$$\begin{aligned}\|Bx\| &\leqslant \alpha\|(A+t_0B)x\| + \alpha t_0\|Bx\| + \beta\|x\| \\ &\leqslant \alpha\|(A+t_0B)x\| + \alpha\|Bx\| + \beta\|x\|,\end{aligned}$$

因此

$$\|Bx\| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(A+t_0B)x\| + \frac{\beta}{1-\alpha}\|x\|. \tag{3.2}$$

因为 $R(t_0): X \to D(A)$ 和 $(A+t_0B)R(t_0) = R(t_0) - I$，所以由 (3.2) 得

$$\begin{aligned}\|BR(t_0)x\| &\leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\|(R(t_0)-I)x\| + \frac{\beta}{1-\alpha}\|R(t_0)x\| \\ &\leqslant \frac{2\alpha+\beta}{1-\beta}\|x\|, \text{ 对一切 } x \in X \text{ 成立。}\end{aligned} \tag{3.3}$$

从而$BR(t_0)$是有界的。为了证明$A+tB$是$m-$耗散的我们将指出$I-(A+tB)$是可逆的，因此其值域是整个X。我们有

$$I-(A+tB)=I-(A+t_0B)+(t_0-t)$$
$$=(I+(t_0-t)BR(t_0))(I-(A+t_0B))。\quad (3.4)$$

因此$I-(A+tB)$是可逆的当且仅当$I+(t_0-t)BR(t_0)$是可逆的。但$I+(t_0-t)BR(t_0)$对一切满足$|t-t_0|<(1-\alpha)(2\alpha+B)^{-1}\leqslant\|BR(t_0)\|^{-1}$的$t$是可逆的。因此选取$\delta=(1-\alpha)(4\alpha+2\beta)^{-1}$即可。证毕。

定理3.2通常是通过以下简单的推论得到应用。

推论 3.3 设A是一个C_0收缩半群的无穷小生成元。设B是耗散的，满足$D(B)\supset D(A)$和

$$\|Bx\|\leqslant\alpha\|Ax\|+\beta\|x\|，\text{对于 } x\in D(A)\text{ 成立}。\quad (3.5)$$

这里$0\leqslant\alpha<1$和$\beta\geqslant0$。则$A+B$是一个C_0收缩半群的无穷小生成元。

证明 由Lumer—Phillips定理（定理1.4.3）$\overline{D(A)}=X$和A是$m-$耗散的。因此对一切$0\leqslant t\leqslant1$，$A+tB$是耗散的。这由以下事实推出：如果A是$m-$耗散的，则$Re\langle Ax,x^*\rangle\leqslant0$，对一切$x^*\in F(x)$成立。事实上，如果$B$是耗散的和$D(B)\supset D(A)$，则对每一$x\in D(A)$存在$x^*\in F(x)$使得$Re\langle Bx,x^*\rangle\leqslant0$和对同一$x^*$，$Re\langle Ax+Bx,x^*\rangle\leqslant0$，由定理3.2知$A+tB$对一切$t\in[0,1]$是$m-$耗散的。特别地，$A+B$是$m-$耗散的。因为$D(A+B)=D(A)$在$X$中稠密，所以根据Lumer—Phillips定理，$A+B$是一个C_0半群的无穷小生成元。

请注意，推论 3.3 能用稍微对称的形式叙述如下：如果 $A+tB$ 对 $t\in[0,1]$ 是耗散的，$D(B)\supset D(A)$，$\overline{D(A)}=X$ 和(3.5)成立，则或者 A 和 $A+B$ 两者都是 $m-$耗散的，或者 A 和 $A+B$ 都不是 $m-$耗散的。

如果在(3.1)中用 $\alpha=1$ 代替 $\alpha<1$，那么定理 3.2 和推论 3.3 一般不成立。原因之一是在这种情形下 $A+B$ 不必是闭的。如果 $A+B$ 不是闭的，则它不可能是一个 C_0 半群的无穷小生成元。这种情况的一个简单例子是由 Hilbert 空间中的自伴算子 iA 提供的。如果 iA 是自伴的，则 A 和 $-A$ 都是 C_0 收缩半群的无穷小生成元（见定理 1.10.8）。在定理 3.2 中取 $B=-A$ 我们得到具有 $\alpha=1$ 和 $\beta=0$ 的估计 (3.1)，但 $A+B$ 限制在 $D(A)$ 上不是闭的。然而在这个简单例子中 $A+B$ 的闭包，即在全空间上的零算子，是一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元，我们的下一个定理表明在某种附加假设下这总是对的。

定理 3.4 设 A 是一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元。设 B 是耗散的使得 $D(B)\supset D(A)$ 和

$$\|Bx\|\leqslant\|Ax\|+\beta\|x\|,\quad 对于\ x\in D(A)\ 成立, \tag{3.6}$$

这里 $\beta\geqslant0$ 是一个常数。如果 B 的伴随 B^* 是稠定义的，则 $A+B$ 的闭包 $\overline{A+B}$ 是一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元。

证明 因为 A 是 $m-$耗散的，B 是耗散的和 $D(B)\supset D(A)$，所以 $A+B$ 是耗散的和稠定义的，因此由定理 1.4.5 $A+B$ 是可闭的和其闭包 $\overline{A+B}$ 是耗散的。从而为了证明 $\overline{A+B}$ 是一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元，指出 $R(I-$

$(\overline{A+B})) = X$ 就充分了。因为 $\overline{A+B}$ 是耗散的和闭的，由定理1.4.2知 $R(I-(\overline{A+B}))$是闭的，因此指出 $R(I-(\overline{A+B}))$在 X 中稠密就充分了。

设 $y^* \in X^*$ 与 $I-(\overline{A+B})$的值域是"直交的"，即$\langle y^*, z\rangle = 0$ 对每一 $z \in R(I-(\overline{A+B}))$成立。设 $y \in X$ 使得 $\|y^*\| \leqslant \langle y^*, y\rangle$。由推论3.3得 $A+tB$ 对于 $0 \leqslant t < 1$ 是 $m-$ 耗散的，因此方程

$$x_t - Ax_t - tBx_t = y \tag{3.7}$$

对每一 $0 \leqslant t < 1$ 有唯一解 x_t。此外，因为 $A+tB$ 是耗散的，所以 $\|x_t\| \leqslant \|y\|$。从(3.6)得

$$\|Bx_t\| \leqslant \|Ax_t\| + \beta\|x_t\| \leqslant \|(A+tB)x_t\| + t\|Bx_t\| + \beta\|x_t\|$$
$$\leqslant \|y - x_t\| + t\|Bx_t\| + \beta\|x_t\|,$$

因此

$$(1-t)\|Bx_t\| \leqslant \|y - x_t\| + \beta\|x_t\| \leqslant (2+\beta)\|y\|. \tag{3.8}$$

设 $z^* \in D(B^*)$，则

$$|\langle z^*, (1-t)Bx_t\rangle| = (1-t)\,|\langle B^*z^*, x_t\rangle|$$
$$\leqslant (1-t)\|B^*z^*\| \cdot \|y\| \to 0, \text{ 当 } t \to 1 \text{ 时。} \tag{3.9}$$

因为 $D(B^*)$在 X^* 中稠密和由(3.8)，$(1-t)Bx_t$ 是一致有界的，因此由(3.9)，当 $t \to 1$ 时，$(1-t)Bx_t$ 弱收敛到零。特别地，由 y^* 的取法，我们有

$$\|y^*\| \leqslant \langle y^*, y\rangle = \langle y^*, x_t - Ax_t - tBx_t\rangle$$
$$= \langle y^*, (1-t)Bx_t\rangle \to 0, \text{ 当 } t \to 1 \text{ 时。}$$

由此推出 $y^* = 0$ 和 $I-(\overline{A+B})$的值域在 X 中稠密。

设 X 是一个自反 Banach 空间，T 是 X 中的一个可闭

的稠定义的算子，则如熟知的，T^* 是闭的和 $D(T^*)$ 在 X^* 中稠密(见引理 1.10.5)。因此对于自反 **Banach** 空间我们有

推论 3.5 设 X 是自反 **Banach** 空间，A 是 X 中一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元。设 B 是耗散的使得 $D(B)\supset D(A)$ 和

$$\|Bx\|\leqslant\|Ax\|+\beta\|x\|,\quad \text{对于 } x\in D(A)\text{ 成立},$$

这里 $\beta\geqslant 0$。则 $A+B$ 的闭包 $\overline{A+B}$ 是 X 中一个 C_0 收缩半群无穷小生成元。

§3.4 Trotter 逼近定理

本节，粗略地说，我们研究一个半群 $T(t)$ 关于其无穷小生成元 A 的连续依赖性和 A 关于 $T(t)$ 的连续依赖性。我们指出无穷小生成元序列的收敛性（在适当的意义下） 等价于相应半群的收敛性。我们从一个引理开始。

引理 4.1 设 A 和 B 分别是 C_0 半群 $T(t)$ 和 $S(t)$ 的无穷小生成元。对每一 $x\in X$ 和 $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(B)$ 我们有

$$R(\lambda;B)[T(t)-S(t)]R(\lambda;A)x$$

$$=\int_0^t S(t-s)[R(\lambda;A)-R(\lambda;B)]T(s)x\,ds \qquad (4.1)$$

证明 对每一 $x\in X$ 和 $\lambda\in\rho(A)\cap\rho(B)$，$X$ 值函数 $s\to S(t-s)R(\lambda;B)T(s)R(\lambda;A)x$ 是可微的。通过简单计算得到

$$\frac{d}{ds}[S(t-s)R(\lambda;B)T(s)R(\lambda;A)x]$$

$$=S(t-s)[-BR(\lambda;B)T(s)+R(\lambda;B)T(s)A]R(\lambda;A)x$$
$$=S(t-s)[R(\lambda;A)-R(\lambda;B)]T(s)x$$

这里我们利用了 $R(\lambda;A)T(s)x=T(s)R(\lambda;A)x$ 的事实。从 0 到 t 对最后的方程积分即得 (4.1)。

后面我们将用记号 $B\in G(M,\omega)$ 表示一个满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元。

定理 4.2 设 A, $A_n\in G(M,\omega)$, $T(t)$和 $T_n(t)$分别是由 A 和 A_n 生成的半群，则以下命题等价：

(a) 对每一 $x\in X$ 和 $Re\lambda>\omega$ 的 λ，当 $n\to\infty$ 时，$R(\lambda;A_n)x\to R(\lambda;A)x$。

(b) 对每一 $x\in X$ 和 $t\geqslant 0$，当 $n\to\infty$ 时，$T_n(t)x\to T(t)x$。

此外，(b)部分的收敛在 t 的有界区间上是一致的。

证明 我们首先证明 (a)$\Longrightarrow$(b)。固定 $x\in X$ 和一个区间 $0\leqslant t\leqslant T$，并且考虑

$$\|(T_n(t)-T(t))R(\lambda;A)x\|\leqslant\|T_n(t)(R(\lambda;A)-R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n))x\|$$
$$+\|R(\lambda;A_n)(T_n(t)-T(t))x\|+\|(R(\lambda;A_n)-R(\lambda;A))T(t)x\|$$
$$=D_1+D_2+D_3. \tag{4.2}$$

因为对 $0\leqslant t\leqslant T$ 有 $\|T_n(t)\|\leqslant Me^{\omega T}$，所以由 (a) 当 $n\to\infty$ 时，$D_1\to 0$ 在[0,1]上是一致的。又因为 $t\to T(t)x$ 是连续的，所以集合 $\{T(t)x;\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 在 X 中是紧的，因此当 $n\to\infty$ 时，$D_3\to 0$在[0,1]上是一致的。最后对 $B=A_n$ 应用引理 4.1 我们有

$$\|R(\lambda;A_n)(T_n(t)-T(t))R(\lambda;A)x\|$$
$$\leqslant\int_0^t\|T_n(t-s)\|\cdot\|(R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n))T(s)x\|ds$$

$$\leqslant \int_0^t \|T_n(t-s)\| \cdot \|(R(\lambda;A) - R(\lambda;A_n))T(s)x\| ds_{\circ} \quad (4.3)$$

(4.3)右端的被积函数是由 $2M^3e^{2\omega T}(Re\lambda-\omega)^{-1}\|x\|$ 控制的有界函数，且当 $n\to\infty$ 时它趋于零，由 Lebesgue 控制收敛定理，(4.3)的右端趋于零。因此

$$\lim_{m\to\infty} \|R(\lambda;A_n)(T_n(t)-T(t))R(\lambda;A)x\| = 0 \qquad (4.4)$$

并且(4.4)中的极限在$[0,T]$上是一致的。因为每一 $x\in D(A)$ 可以写成 $x=R(\lambda;A)z$ 对某一 $z\in X$,所以从(4.4)对 $x\in D(A)$，当 $n\to\infty$ 时，$D_2\to 0$ 在$[0,T]$上是一致的。于是由(4.2)，对 $x\in D(A^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_n(t)-T(t))x\| = 0 \qquad (4.5)$$

并且(4.5)中的极限在$[0,T]$上是一致的。因为 $\|T_n(t)-T(t)\|$ 在$[0,T]$上一致有界和 $D(A^2)$ 在 X 中稠密（见定理 1.2.7），所以对每一 $x\in X$，(4.5)在$[0,T]$上一致成立。故$(a)\Longrightarrow(b)$。

现设(b)成立，那么对 $Re\lambda>\omega$，

$$\|R(\lambda;A_n)x-R(\lambda;A)x\| \leqslant \int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\|(T_n(t)-T(t))x\|dt_{\circ} \quad (4.6)$$

当 $n\to\infty$ 时，由 **Lebesgue** 控制收敛定理，(4.6) 的右端趋于零。因此$(b)\Longrightarrow(a)$。

注　从定理 4.2 的证明显然(a)的一个较弱的形式，即对一切 $x\in X$ 和某一使得 $Re\lambda_0>\omega$ 的 λ_0，当 $n\to\infty$ 时，$R(\lambda_0;A_n)x\to R(\lambda_0;A)x$，仍然蕴涵$(b)$。

我们说一个算子序列 A_n r—收敛到一个算子 A，如果对某复数 λ，对一切 $x\in X$，$R(\lambda;A_n)x\to R(\lambda;A)x$。在定理 4.2 中我们假设了序列 A_n 的 r—极限 A 存在和进一步假设了 $A\in G(M,\omega)$。我们的下一个定理推出这些假设是不必要的。

定理 4.3 设 $A_n \in G(M,\omega)$，如果存在 $Re\lambda_0 > \omega$ 的 λ_0 使得

(a) 对每一 $x \in X$，当 $n \to \infty$ 时，$R(\lambda_0; A)x \to R(\lambda_0)x$ 和

(b) $R(\lambda_0)$的值域在 X 中稠密。

则存在唯一的算子 $A \in G(M,\omega)$ 使得 $R(\lambda_0) = R(\lambda_0; A)$。

证明 不失一般性我们假设 $\omega = 0$。首先证明当 $n \to \infty$ 时，对一切 $Re\lambda > 0$ 的 λ，$R(\lambda; A_n)x$ 收敛。事实上，命 $S = \{\lambda: Re\lambda > 0, R(\lambda; A_n)x$ 当 $n \to \infty$ 时收敛$\}$。S 是开的。为此当 $n \to \infty$ 时在 $R(\mu; A_n)x$ 的收敛点 μ 附近将 $R(\lambda; A_n)$展成 Taylor 级数，则

$$R(\lambda; A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^k R(\mu; A_n)^{k+1}. \qquad (4.7)$$

因为由注记 1.5.4 $\|R(\mu; A_n)^k\| \leqslant M(Re\mu)^{-k}$，所以对所有满足 $|\mu - \lambda|(Re\mu)^{-1} < 1$ 的 λ 级数(4.7)依一致算子拓扑收敛。而对于满足 $|\mu - \lambda|(Re\mu)^{-1} \leqslant \theta < 1$ 的 λ，收敛关于 λ 是一致的，且数值级数 $\sum_{k=0}^{\infty} M\theta^{k+1}$ 是 $\sum_{k=0}^{\infty} |\mu - \lambda|^k \|R(\mu; A_n)^{k+1}\|$ 的优级数。这就推出当 $n \to \infty$ 时，对所有满足 $|\mu - \lambda|(Re\mu)^{-1} \leqslant \theta < 1$ 的 λ，$R(\lambda; A_n)x$ 的收敛性。因此集合 S 是开的。设 λ 是 S 的一个聚点和 $Re\lambda > 0$。给定 $0 < \theta < 1$，存在一点 $\mu \in S$ 使得 $|\mu - \lambda|(Re\mu)^{-1} \leqslant \theta < 1$，因此由证明的第一部分当 $n \to \infty$ 时，$R(\lambda; A_n)x$ 收敛，即 $\lambda \in S$。因此 S 在 $Re\lambda > 0$ 中是相对闭的。因此由假设 $\lambda_0 \in S$，我们得到 $S = \{\lambda: Re\lambda > 0\}$。

对每一 $Re\lambda > 0$ 的 λ，我们定义一个线性算子 $R(\lambda)$

$$R(\lambda)x = \lim_{n \to \infty} R(\lambda; A_n)x. \qquad (4.8)$$

显然

$$R(\lambda)-R(\mu)=(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu),$$
$$\text{对于 } Re\lambda>0 \text{ 和 } Re\mu>0 \text{ 成立。} \tag{4.9}$$

因此 $R(\lambda)$ 是 $Re\lambda>0$ 上的一个伪预解式（见定义 1.9.1）。因为对于一个伪预解式，$R(\lambda)$ 的值域不依赖于 λ（见引理 1.2.9），所以由 (b) 我们有 $R(\lambda)$ 的值域在 X 中稠密。又从 $R(\lambda)$ 的定义显然

$$\|R(\lambda)^k\|\leqslant M(Re\lambda)^{-k}, \text{ 对于 } Re\lambda>0, k=1,2,\cdots \text{成立。} \tag{4.10}$$

特别地，对实的 $\lambda>0$

$$\|\lambda R(\lambda)\|\leqslant M, \text{ 对一切 } \lambda>0 \text{ 成立。} \tag{4.11}$$

于是由定理 1.4.4 存在唯一的闭稠定义的线性算子 A 使得 $R(\lambda)=R(\lambda;A)$。最后由(4.10)和定理 1.5.2 得 $A\in G(M,0)$。证毕。

定理 4.2 和 4.3 的一个直接推论是下述定理。

定理 4.4(Trotter—Kato) 设 $A_n\in G(M,\omega)$，$T_n(t)$ 是半群，其无穷小生成元是 A_n。如果对于某一 $Re\lambda_0>\omega$ 的 λ_0 我们有

(a) 当 $n\to\infty$ 时，$R(\lambda_0;A_n)\to R(\lambda_0)x$ 对一切 $x\in X$ 成立和

(b) $R(\lambda_0)$ 的值域在 X 中稠密。

则存在唯一的算子 $A\in G(M,\omega)$ 使得 $R(\lambda_0)=R(\lambda_0;A)$。如果 $T(t)$ 是由 A 生成的 C_0 半群，则当 $n\to\infty$ 时，$T_n(t)x\to T(t)x$ 对一切 $t\geqslant0$ 和 $x\in X$ 成立，且极限在 t 的有界区间上关于 t 是一致的。

上述结果的一个稍有不同的推论是下述定理。

定理 4.5 设 $A_n\in G(M,\omega)$。又设

(a) 当 $n\to\infty$ 时，$A_nx\to Ax$ 对一切 $x\in D$ 成立，这里

D 是 X 的一个稠密子集。

（b） 存在 $Re\lambda_0>\omega$ 的 λ_0，使得 $(\lambda_0 I-A)D$ 在 X 中稠密。

则 A 的闭包 $\overline{A}$ 是在 $G(M,\omega)$ 中。如果 $T_n(t)$ 和 $T(t)$ 分别是由 A_n 和 $\overline{A}$ 生成的 C_0 半群，则

$$\lim_{n\to\infty} T_n(t)=T(t)x, \text{ 对于 } t\geqslant 0 \text{ 和 } x\in X \text{ 成立，} \tag{4.12}$$

并且 (4.12) 中的极限在 t 的有界区间上关于 t 是一致的。

证明 设$y\in D$, $x=(\lambda_0 I-A)y$ 和 $x_n=(\lambda_0 I-A_n)y$, 因为当 $n\to\infty$ 时，$A_n y\to Ay$, 所以 $x_n\to x$。又因为 $\|R(\lambda_0;A)\|\leqslant M(Re\lambda_0-\omega)^{-1}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0;A_n)x=\lim_{n\to\infty}(R(\lambda_0;A_n)(x-x_n)+y)=y. \tag{4.13}$$

即$R(\lambda_0;A_n)$ 在 $\lambda_0 I-A$ 的值域中收敛。但由 (b) 这个值域在 X 中稠密，并由我们的假设 $\|R(\lambda_0;A_n)\|$ 是一致有界的。因此对每一 $x\in X$, $R(\lambda_0;A_n)x$ 收敛。设

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0;A_n)x=R(\lambda_0)x. \tag{4.14}$$

由(4.13), $R(\lambda_0)$ 的值域包含 D, 因此在 X 中稠密。定理 4.3 推出存在一个算子 $A'\in G(M,\omega)$ 满足 $R(\lambda_0)=R(\lambda_0;A')$。为了结束证明我们指出 $\overline{A}=A'$。设 $x\in D$, 则

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0;A)(\lambda_0 I-A)x=R(\lambda_0;A')(\lambda_0 I-A)x. \tag{4.15}$$

另一方面当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}R(\lambda_0;A_n)(\lambda_0 I-A)x&=R(\lambda_0;A_n)(\lambda_0 I-A_n)x\\&\quad+R(\lambda_0;A_n)(A_n-A)x\\&=x+R(\lambda_0;A_n)(A_n-A)x\to x,\end{aligned}$$

因为 $\|R(\lambda_0;A_n)\|$ 是一致有界的，且对 $x\in D$, $A_n x\to Ax$, 因此

$$R(\lambda_0;A')(\lambda_0 I-A)x=x, \text{ 对于 } x\in D \text{ 成立。} \tag{4.16}$$

但(4.16)推出 $A'x=Ax$ 对于 $x\in D$ 成立。因此 $A'\supset A$。因为 A' 是闭的，所以 A 是可闭的。以下我们证明 $\overline{A}\supset A'$。设 $y'=A'x'$。因为$(\lambda_0 I-A)D$ 在 X 中稠密，存在序列 $x_n\in D$ 使得

$$\begin{aligned} y_n=(\lambda_0 I-A')x_n&=(\lambda_0 I-A)x_n\to\lambda_0 x'-y' \\ &=(\lambda_0 I-A')x', \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时。} \end{aligned} \tag{4.17}$$

因此

$$\begin{aligned} x_n=R(\lambda_0;A')y_n&\to R(\lambda_0;A')(\lambda_0 I-A')x' \\ &=x', \quad \text{当 } n\to\infty \text{ 时，} \end{aligned} \tag{4.18}$$

和

$$Ax_n=\lambda_0 x_n-y_n\to y', \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时。} \tag{4.19}$$

由(4.18)和(4.19)得 $y'=\overline{A}x'$ 和 $\overline{A}\supset A'$。因此 $\overline{A}=A'$。定理的其余论断直接由定理 4.4 推出。

§3.5 一个一般的表示定理

用上一节的结果我们将在这一节得到一个表示定理。它大大地推广了1.8节的结果，我们从一个预备估计开始。

引理 5.1 设 T 是一个有界线性算子满足

$$\|T^k\|\leqslant MN^k, \quad k=1,2,\cdots \tag{5.1}$$

这里 $N\leqslant 1$，则对每一 $n\geqslant 0$ 我们有

$$\|e^{(T-I)n}x-T^n x\|\leqslant MN^{n-1}e^{(N-1)n}[n^2(N-1)^2+nN)^{\frac{1}{2}}\|x-Tx\|. \tag{5.2}$$

证明 设 $k, n\geqslant 0$ 是整数。如果 $k\geqslant n$，则

$$\|T^k x-T^n x\|=\left\|\sum_{j=n}^{k-1}(T^{j+1}x-T^j x)\right\|$$

$$\leqslant M\|x-Tx\|\sum_{j=n}^{k-1}N^j\leqslant(k-n)MN^{k-1}\|x-Tx\|$$

$$\leqslant|k-n|\,MN^{n+k-1}\,\|x-Tx\|. \tag{5.3}$$

从估计(5.3)关于 k 和 n 的对称性显然(5.3)对 $n>k$ 亦成立。对于 $k=n$ 我们有等式。因此对所有整数 $k, n\geqslant 0$ (5.3)成立。现在

$$\|e^{t(T-I)}x-T^n x\|=\left\|e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(T^k x-T^n x)\right\|$$

$$\leqslant e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\|T^k x-T^n x\|$$

$$\leqslant MN^{n-1}\|x-Tx\|\,e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}\,|k-n| \tag{5.4}$$

利用 Cauchy—Schwartz 不等式我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}|n-k|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}(n-k)^2\right)^{\frac{1}{2}}=e^{tN}((n-Nt)^2+Nt)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{5.5}$$

综合 (5.4) 和 (5.5) 我们得到

$$\|e^{t(T-I)}x-T^n x\|\leqslant MN^{n-1}e^{(N-1)t}[(n-Nt)^2+Nt]^{\frac{1}{2}}\|x-Tx\|$$

$$(5.6)$$

在 (5.6) 中以 $t=n$ 代 λ 我们得到 (5.2)。

注 函数 $e^{t(T-I)x}$ 是微分方程 $\frac{du}{dt}=(T-I)x,\ u(0)=x$ 的解。$T^n x$ 是这个方程的解的步长为 1 的多项式逼近，即 $T^n x$ 是以下差分方程的解

$$u(j+1)-u(j)=(T-I)u(j),\quad u(0)=x.$$

推论 5.2 如果 T 在 X 上是非扩张的，即 $\|T\|\leqslant 1$，则对每一 $n\geqslant 0$ 我们有

$$\|e^{(T-I)n}x-T^n x\|\leqslant\sqrt{n}\,\|x-Tx\|. \tag{5.7}$$

现在我们转向表示定理。

定理 5.3 设 $F(\rho)$，$\rho\geqslant 0$ 是一族有线界性算子满足

$$\|F(\rho)^k\|\leqslant Me^{\omega\rho k},\quad k=1,2,\cdots \tag{5.8}$$

对某常数 $\omega\geqslant 0$ 和 $M\geqslant 1$ 成立。设 D 是 X 的一个稠密子集和

$$\lim_{\rho\to 0}\rho^{-1}(F(\rho)x-x)=Ax,\ \text{对于}\ x\in X\ \text{成立。} \tag{5.9}$$

如果对某一 $Re\lambda_0>\omega$ 的 λ_0，$(\lambda_0 I-A)D$ 在 X 中稠密，则 A 是可闭的，且 A 的闭包 $\overline{A}\in G(M,\omega)$。此外如果 $T(t)$ 是由 $\overline{A}$ 生成的 Co 半群，则对每一满足 $k_n\rho_n\to t$ 的正整数序列 $k_n\to\infty$ 我们有

$$\lim_{n\to\infty}F(\rho_n)^{k_n}x=T(t)x,\ \text{对于}\ x\in X\ \text{成立。} \tag{5.10}$$

同时对每一 n 选取 $\rho_n k_n=t$，(5.10) 中的极限在 t 的有界区间上是一致的。

证明 对于 $\rho>0$ 考虑有界算子 $A_\rho=\rho^{-1}(F(\rho)-I)$。这些算子是满足

$$\|S_\rho^\omega(t)\| \leqslant e^{-t/\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\rho}\right)^k\frac{\|F(\rho)^k\|}{k!} \leqslant M\exp\left\{\frac{t}{\rho}(e^{\omega\rho}-1)\right\}$$

的一致连续半群 $S_\rho(t)$ 的无穷小生成元。设 $\varepsilon>0$ 使得 $Re\lambda_0>\omega+\varepsilon$ 和 $\rho_0>0$ 使得对于 $0<\rho\leqslant\rho_0$ 有 $(e^{\omega\rho}-1)\rho^{-1}<\omega+\varepsilon$，则

$$\|S_\rho(t)\| \leqslant Me^{(\omega+\varepsilon)t} \text{ 对于 } 0\leqslant\rho\leqslant\rho_0 \text{ 成立。}$$

由定理 4.5，A 是可闭的 和 $\overline{A}\in G(M,\omega+\varepsilon)$。如果 $T(t)$ 是由 $\overline{A}$ 生成的半群，则由定理 4.5 进一步推出

$$\|S_\rho(t)x-T(t)x\|\to 0, \text{ 当 } \rho\to 0 \text{ 时，} \tag{5.11}$$

在 t 的有界区间上是一致的。

另一方面，从引理 5.1 得

$$\|S_{\rho_n}(\rho_n k_n)x-F(\rho_n)^{k_n}x\| \leqslant Mexp\{\omega\rho_n(k_n-1)+e^{\omega\rho_n}-1)k_n\}\cdot$$

$$[k_n^2(e^{\omega\rho_n}-1)^2+k_n e^{\omega\rho_n}]^{\frac{1}{2}}\cdot\rho_n\left\|\frac{F(\rho_n)x-x}{\rho_n}\right\|.$$

选取 $x\in D$，$\rho_n\to 0$，$k_n\to\infty$ 使得 $\rho_n k_n\to t$，显然当 $n\to\infty$ 时，$\rho_n k_n$，$(e^{\omega\rho_n}-1)k_n$ 和 $\rho_n^{-1}\|F(\rho_n)x-x\|$ 保持有界。因此我们有

$$\|S_{\rho_n}(\rho_n k_n)x-F(\rho_n)^{k_n}x\| \leqslant G\rho_n^{1/2}\to 0, \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时。} \tag{5.12}$$

如果 $\rho_n=t/k_n$，那么对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 可选取常数 C 不依赖于 t。在这种情况就推出 (5.12) 中的收敛在有界区间上是一致的。对 $x\in D$ 我们有

$$\|T(t)x-F(\rho_n)^{k_n}x\| \leqslant \|T(t)x-S_{\rho_n}(t)x\|+\|S_{\rho_n}(t)x-S_{\rho_n}(k_n\rho_n x)\|$$

$$+\|S_{\rho_n}(k_n\rho_n)x+F(\rho_n)^{k_n}x\|=I_1+I_2+I_3.$$

由 (5.11) 和 (5.12) 当 $n\to\infty$ 时，$I_1\to 0$ 和 $I_3\to 0$。为了证明当 $n\to\infty$ 时，$I_2\to 0$。我们注意，对于 $x\in D$，$0\leqslant t\leqslant T$，当 n 充分大时我们有

$$\|S_{\rho_n}(t)x-S_{\rho_n}(\rho_n k_n)x\|\leqslant Me^{(\omega+\varepsilon)T}|t-\rho_n k_n|\left\|\frac{F(\rho_n)x-x}{\rho_n}\right\|$$

$$\longrightarrow 0,\ 当\ n\to\infty\ 时。$$

如果 $\rho_n=t/k_n$，则 $I_2\equiv 0$。这结束了对 $x\in D$ (5.10)的证明。因为 D 在 X 中稠密和 $\|T(t)-F(\rho_n)^{k_n}\|$ 是一致有界的，因此对每一 $x\in X$，(5.10) 成立。

最后，对每一充分小的 $\varepsilon>0$，由$\overline{A}$生成的半群 $T(t)$ 满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{(\omega+\varepsilon)t}$，因此 $T(t)$ 也满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 和$\overline{A}\in G(M,\omega)$。

推论 5.4 设 $F(\rho)$，$\rho\geqslant 0$ 是一族有界线性算子满足

$$\|F(\rho)^k\|\leqslant Me^{\omega\rho k},\ k=1,2,\cdots \tag{5.13}$$

对某常数 $\omega\geqslant 0$ 和 $M\geqslant 1$ 成立。设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$的无穷小生成元。如果

$$\rho^{-1}(F(\rho)x-x)\to Ax,\ 当\ \rho\to 0\ 时，$$

$$对每一\ x\in D(A)\ 成立。\tag{5.14}$$

则

$$T(t)x=\lim_{n\to\infty}F\left(\frac{t}{n}\right)^n x,\ 对于\ x\in X\ 成立。\tag{5.15}$$

并且极限在 t 的有界区间上是一致的。

证明 因为 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元，所以它是闭的和对充分大的实数 λ，$\lambda I-A$ 的值域是整个 X。因此由定理 5.3 即得我们的结果。

作为推论 5.4 的一个简单推论，我们能证明指数公式

$$T(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x,\ 对于\ x\in X\ 成立。\tag{5.16}$$

这里 $T(t)$ 是一个 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。这个公式已经用不同的方法在定理 1.8.3 中证明了。

为了证明 (5.16) 假设 $A\in G(M,\omega)$ 和对于 $0<\rho<\frac{1}{\mu}$ 命

$F(\rho)=(I-\rho A)^{-1}=\frac{1}{\rho}\ R(\frac{1}{\rho};A)$。由定理 1.5.3 得

$$\|F(\rho)^n\|\leqslant M(1-\rho\omega)^{-n}\leqslant Me^{2\omega\rho n}$$

对于 ρ 充分小成立。又由引理 1.3.2，如果 $x\in D(A)$，则

$$\frac{1}{\rho}(F(\rho)-I)x=A\left(\frac{1}{\rho}R\left(\frac{1}{\rho};\ A\right)x\right)\to Ax.$$

因此 $F(\rho)=(I-\rho A)^{-1}$ 满足推论 5.4 的条件。于是(5.16)是这个推论的一个直接系。

推论 5.5 设 $A_j\in G(M_j,\omega_j)$，$j=1,2,\cdots k$ 和 $S_j(t)$ 是由 A_j 生成的半群。设 $\bigcap\limits_{j=1}^{k}D(A_j)$ 在 X 中稠密和

$$\|(S_1(t)S_2(t)\cdots S_k(t))^n\|\leqslant Me^{\omega nt},\quad n=1,2,\cdots \tag{5.17}$$

对某常数 $M\geqslant 1$ 和 $\omega\geqslant 0$ 成立。如果对于某一 $Re\lambda>\omega$ 的 λ，$\lambda I-(A_1+A_2+\cdots+A_k)$ 的值域在 X 中稠密，则 $\overline{A_1+A_2+\cdots+A_k}\in G(M,\omega)$。如果 $S(t)$ 是由 $\overline{A_1+A_2+\cdots+A_k}$ 生成的半群，那么我们有

$$S(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(S_1\left(\frac{t}{n}\right)S_2\left(\frac{t}{n}\right)\cdots S_k\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x,\ \text{对于}\ x\in X\ \text{成立}. \tag{5.18}$$

并且极限在 t 的有界区间上是一致的。

证明 命 $F(t)=S_1(t)S_2(t)\cdots S_k(t)$ 和 $\prod_{i=1}^{j} S_i(t)=S_1(t)\cdot S_2(t)\cdots S_j(t)$。对于 $x\in\bigcap_{j=1}^{k} D(A_j)$ 和 $t\to 0$ 我们有

$$\frac{F(t)x-x}{t}=\sum_{j=1}^{k}\left(\prod_{i=1}^{j-1} S_i(t)\right)\frac{S_j(t)x-x}{t}$$

$$\longrightarrow(A_1+A_2+\cdots+A_k)x. \tag{5.19}$$

于是所证结果直接由定理 5.3 推出。

推论 5.5 是解偏微分方程的分式步长方法的一种抽象形式。这种方法的思想如下：为了解初值问题

$$\frac{du}{dt}=(A_1+A_2+\cdots+A_k)u,\quad u(0)=x. \tag{5.20}$$

我们仅需要解 k 个较简单的问题

$$\frac{du_j}{dt}=A_ju_j,\quad u_j(0)=u_0,\quad j=1,2\cdots,k, \tag{5.21}$$

并且按照 (5.18) 组合 (5.21) 的解就得到 (5.20) 的解。

"交错方向"法也是这种一般抽象结果的一种特殊情形。

我们以同推论 5.5 类似的对于(5.20)的后向差分逼近的结果来结束本节。

推论 5.6 设 $A_j\in G(M_j,\ \omega_j)$, $j=1,2,\cdots,k$, 如果 $A_1+A_2+\cdots+A_k\in G(M,\omega)$ 和

$$\|((I-tA_1)^{-1}(I-tA_2)^{-1}\cdots(I-tA_k)^{-1}\|\leqslant Me^{\omega nt},$$
$$n=1,2,\cdots. \tag{5.22}$$

则由 $A_1+A_2+\cdots+A_k$ 生成的半群 $S(t)$ 如下给出

$$S(t)x=\lim_{n\to\infty}\left[\left(I-\frac{t}{n}A_1\right)^{-1}\left(I-\frac{t}{n}A_2\right)^{-1}\cdots\left(I-\frac{t}{n}A_k\right)^{-1}\right]^n x,$$

对一切 $x\in X$ 成立。 (5.23)

证明 命 $F(t)=(I-tA_1)^{-1}(I-tA_2)^{-1}\cdots(I-tA_k)^{-1}=\prod_{i=1}^{k}(I-tA_i)^{-1}$。对于 $u\in\bigcap_{j=1}^{k}D(A_j)=D(A_1+A_2+\cdots+A_k)$ 和 $t\to0$ 我们有

$$\frac{F(t)x-x}{t}=\sum_{j=1}^{k}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(I-tA_i)^{-1}\right)\frac{(I+tA_j)^{-1}x-x}{t}$$

$$\longrightarrow(A_1+A_2+\cdots A_k)x。 \qquad (5.24)$$

这里我们利用了这样的事实：如果 $A\in G(M,\omega)$，则当 $t\to0$ 时，$(I-tA)^{-1}y\to y$ 对一切 $y\in X$ 成立和 $t^{-1}((I-tA)^{-1}x-x)\to Ax$ 对 $x\in D(A)$ 成立。于是所证结果直接由推论 5.4 推出。

§3.6 离散半群的逼近

在本节，我们利用一个例子指出前面的结果怎样通过差分方程能够应用于获得偏微分方程的初值问题的解。

这里我们所提供的结果在这样的意义下是相当特殊的，即较强的类似结果甚至在稍弱的条件下可以得到。因为我们在这里的目的仅是举例说明方法，所以我们宁愿给出一些多余的假设（如以下假设 6.1 的 (iv) 部分）以避免某些技术细节。

设 X 和 X_n 是 Banach 空间，分别具有范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_n$，我们将使用以下假设

假设 6.1 对每一 $n\geq 1$ 存在有界线性算子 $P_n:X\to X_n$ 和 $E_n:X_n\to X$ 使得

(i) $\|P_n\|\leq N$，$\|E_n\|\leq N'$，N 和 N' 不依赖于 n。

(ii) $\|P_n x\|_n\to\|x\|$，当 $n\to\infty$ 时对一切 $x\in X$ 成立。

(iii) $\|E_nP_nx-x\|\to 0$，当 $n\to\infty$ 时对一切 $x\in X$ 成立。

(iv) $P_nE_n=I_n$，这里 I_n 是 X_n 上的恒等算子。

例 6.2 设 $X=BU([-\infty,\infty])$是所有定义在 R^1 上的有界的一致连续实值函数的空间。设 $X_n=b$ 是所有有界的实序列 $\{C_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 的空间。两个空间 $BU([-\infty,\infty])$ 和 b都赋有通常的上确界范数。我们定义 $P_nf(x)=\{f(k/n)\}_{k=-\infty}^{\infty}$，则 P_n 显然是线性的和 $\|P_n\|\leq 1$。由范数的定义和 X 的元素的一致连续性，(ii) 被满足是显然的。取 E_n 为这样的线性算子，它映一个序列 $\{C_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 为这样的函数$f(x)$，它在点 $x=\dfrac{k}{n}$ 等于 C_k 和在任意两个相邻点 $\dfrac{j}{n}$ 和 $\dfrac{j+1}{n}$ 之间是线性的，我们得到 $\|E_n\|\leq 1$。显然 $P_nE_n=I_n$，并由 X的元素的一致连续性和 E_n，P_n 的定义知 (iii) 成立。

定义 6.3 称一个序列 $x_n\in X_n$ 收敛到 $x\in X$，如果

$$\|P_nx-x_n\|_n\to 0，当 n\to\infty 时， \tag{6.1}$$

这种类型的收敛在不至引起混淆时将用 $x_n\to x$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 表示。

注意这种收敛序列的极限是唯一的。事实上，如果 $x_n\to x$ 和 $x_n\to y$，则

$$\|x-y\|=\lim_{n\to\infty}\|P_n(x-y)\|_n$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\|P_nx-x_n\|_n+\lim_{n\to\infty}\|x_n-P_ny\|_n=0。$$

定义 6.4 称一个线性算子序列 $A_n: X_n\to X_n$ 收敛到一个算子 $A: X\to X$，如果

$$D(A)=\{x: P_nx\in D(A_n), A_nP_nx \text{ 收敛}\} \tag{6.2}$$

和

$$Ax=\lim_{n\to\infty}A_nP_nx \text{ 对于 } x\in D(A) \text{ 成立。} \tag{6.3}$$

我们将用 $A_n\to\to A$ 表示这种类型的收敛。

注意 $A_n\to\to A$ 意味着对每一 $x\in D(A)$

$$\|A_nP_nx-P_nAx\|_n\to 0, \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时。} \tag{6.4}$$

引理 6.5 设 $\{x_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个 Cauchy 列。如果对每一固定的 k，当 $n\to\infty$ 时，$x_n^k\to x^k\in X$（在定义 6.3的意义下）和当 $k\to\infty$ 时，$x_n^k\to x_n\in X$ 关于 n 是一致的。则二重极限存在和

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{k\to\infty}x^k=x\in X \tag{6.5}$$

证明 首先我们证明 x^k 是 X 中的一个收敛序列，我们有

$$\|P_nx^k-P_nx^l\|_n\leqslant\|P_nx^k-x_n^k\|_n+\|x_n^k-x_n^l\|_n+\|x_n^l-P_nx^l\|_n.$$

给定 $\varepsilon>0$，我们选取 $k,l\geqslant K(\varepsilon)$ 使得 $\|x_n^k-x_n^l\|_n<\varepsilon/6$ 对一切n 成立。然后我们选取 $n_0=n_0(k,l)$ 充分大使得 $\|P_nx^k-x_n^k\|_n<\varepsilon/6$ 和 $\|x^k-x^l\|\leqslant\|P_n(x^k-x^l)\|_n+\varepsilon/2$ 对一切 $n\geqslant n_0$ 成立。因此对于 $k,l\geqslant K(\varepsilon)$，选取 $n\geqslant n_0(k,l)$ 我们有 $\|x^k-x^l\|\leqslant\varepsilon$。从而当 $k\to\infty$ 时，$x^k\to x$。其次我们证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。事实上，

$$\|P_n x - x_n\|_n \leqslant \|P_n x - P_n x^k\|_n + \|P_n x^k - x_n^k\|_n + \|x_n^k - x_n\|_n$$
$$\leqslant N\|x - x^k\| + \|P_n x^k - x_n^k\|_n + \|x_n^k - x_n\|_n.$$
给定 $\varepsilon>0$，我们首先选取并固定 k 充分大使得 $N\|x-x^k\|<\varepsilon/3$ 和 $\|x_n^k - x_n\|_n<\varepsilon/3$ 对一切 n 成立。然后我们选取 $n_0(k)$ 充分大使得 $\|P_n x^k - x_n^k\|_n<\varepsilon/3$ 对一切 $n\geqslant n_0$ 成立。因此对 $n>n_0$，$\|P_n x - x_n\|_n<\varepsilon$ 和 $x_n\to x$。

引理 6·6 设 $A_n: X_n\to X_n$ 是一个有界线性算子的序列。如果 $\|A_n\|\leqslant M$，$A_n \to\to A$ 和 $D(A)$ 在 X 中稠密，则 $D(A)=X$ 和 $\|A\|\leqslant M$。

证明 设 $x\in X$。因为 $D(A)$ 在 X 中稠密，存在序列 $x^k\in(A)$ 使得 $x^k\to x$。现在
$$\|A_n P_n x^k - A_n P x\|_n \leqslant M\|P_n x^k - P_n x\|_n \leqslant MN\|x^k - x\|. \quad (6.6)$$
当 $n\to\infty$ 时，这推出 $A_n P_n x^k \to A_n P_n x$ 关于 n 是一致的。此外，因为 $x^k\in D(A)$，所以当 $n\to\infty$ 时，对每一 k 有 $A_n P x^k\to A x^k$。应用引理 6.5 于序列 $x_n^k = A_n P_n x^k$ 推出当 $n\to\infty$ 时，$A_n P_n x$ 收敛，由此推出 $x\in D(A)$。因此 $D(A)=X$。最后
$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty}\|P_n A x\|_n = \lim_{n\to\infty}\|A_n P_n x\|_n$$
$$\leqslant M\lim_{n\to\infty}\|P_n x\|_n = M\|x\|$$
证毕。

定理 6·7 设 $F(\rho_n)$ 是从 X_n 到 X_n 内的有界线性算子序列，满足
$$\|F(\rho_n)^k\| \leqslant M e^{\omega\rho_n k}, \quad k=1, 2, \cdots \quad (6.7)$$
和
$$A_n = \rho_n^{-1}(F(\rho_n) - I) \to\to A. \quad (6.8)$$
如果 $D(A)$ 在 X 中稠密和存在 $Re\lambda_0>\omega$ 的 λ_0，使得 $\lambda_0 I - A$

的值域在 X 中稠密，则 A 的闭包 $\overline{A}$ 是 X 上一个 C_0 半群的无穷小生成元。此外，如果当 $n\to\infty$ 时 $k_n\rho_n\to t$，则

$$F(\rho_n)^{k_n}\to\to S(t), \qquad (6.9)$$

这里 $D(S(t))=X$。

证明 因为 A_n 是 X_n 上的一个有界线性算子，因此 A_n 在 X_n 上生成一个一致连续半群。容易验证（如见定理 5.3 的证明）

$$\|S_n(t)\|\leqslant Me^{\omega_n t}, \qquad (6.10)$$

这里 $\omega_n=\rho_n^{-1}(e^{\omega\rho_n}-1)$，给定 $\varepsilon>0$，对所有充分小的 ρ_n 有 $\omega_n\leqslant\omega+\varepsilon$。命 $\widetilde{A}_n=E_nA_nP_n$。这里 $\widetilde{A}_n$ 是 X 上的一个有界线性算子。因此 $\widetilde{A}_n$ 在 X 上生成一个半群 $\widetilde{S}_n(t)$。利用假设 6.1 (iv) 我们有

$$\widetilde{S}_n(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\widetilde{A}_n^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}E_nA_n^kP_n$$

$$=E_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A_n^k\right)P_n=E_nS_n(t)P_n. \qquad (6.11)$$

因此对充分大的 n 我们有

$$\|\widetilde{S}_n(t)\|\leqslant MNN'e^{(\omega+\varepsilon)t}=M_1e^{(\omega+\varepsilon)t}. \qquad (6.12)$$

如果 $x\in D(A)$，则当 $n\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\|\widetilde{A}_nx-Ax\|&=\|E_nA_nP_nx-Ax\|\\&\leqslant\|E_nA_nP_nx-E_nP_nAx\|+\|E_nP_nAx-Ax\|\\&\leqslant N'\|A_nP_nx-P_nAx\|+\|E_nP_nAx-Ax\|\to 0 \qquad (6.13)\end{aligned}$$

这里当 $n\to\infty$ 时，(6.13) 右端的第一项趋于零，因为 $x\in D$

(A) 和 $A_n \to\to A$，并且由假设 6.1 (iii) 当 $n\to\infty$ 时，第二项也趋于零。由定理 5.3，$\overline{A}\in G(M_1,\omega+\varepsilon)$。因为 $\varepsilon>0$ 是任意的，实际上我们有 $\overline{A}\in G(M_1,\omega)$，即 $\overline{A}$ 是一个满足 $\|S(t)\|\leqslant M_1e^{\omega t}$ 的 C_0 半群 $S(t)$ 的无穷小生成元。从定理 5.3 我们亦有

$$\|\widetilde{S}_n(t)x-S(t)x\|\to 0，当 n\to\infty 时。\tag{6.14}$$

因此

$$\|S_n(t)P_nx-P_nS(t)x\|_n=\|P_n\widetilde{S}_n(t)x-P_nS(t)x\|_n$$
$$\leqslant N\|\widetilde{S}_n(t)x-S(t)x\|\to 0。当 n\to\infty 时。\tag{6.15}$$

由引理 5.1 我们有常数 C 使得

$$\|S_n(\rho_nk_n)P_nx-F(\rho_n)^{k_n}P_nx\|_n$$
$$\leqslant C\rho_n^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{F(\rho_n)-I}{\rho_n}P_nx\right\|=C\rho_n^{\frac{1}{2}}\|A_nP_nx\|。\tag{6.16}$$

估计 (6.16) 由引理 5.1 用类似于从它得到 (5.12) 的方法推出。选取 $x\in D(A)$ 我们有

$$\|A_nP_nx\|_n\leqslant\|A_nP_nx-P_nAx\|_n+\|P_nAx\|_n\leqslant C_1。\tag{6.17}$$

最后，

$$\|D(\rho_n)^{k_n}P_nx-P_nS(t)x\|_n=\|F(\rho_n)^{k_n}P_nx-S_n(\rho_nk_n)P_nx\|_n$$
$$+\|S_n(\rho_nk_n)P_nx-S_n(t)P_nx\|_n+\|S_n(t)P_nx-P_nS(t)x\|_n$$
$$\leqslant(C\rho_n^{\frac{1}{2}}+|\rho_nk_n-t|)\|A_nP_nx\|_n+\|S_n(t)P_nx-P_nS(t)x\|_n。\tag{6.18}$$

综合 (6.15)，(6.17) 和 (6.18) 并让 $\rho_n\to 0$ 使得 $\rho_nk_n\to t$，对每一 $x\in D(A)$ 我们得到

$$\|F(\rho_n)^{k_n}P_nx-P_nS(t)x\|_n\to 0,\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}. \tag{6.19}$$

因为 $\|F(\rho_n)^{k_n}\|$ 是一致有界的，所以对每一 $x\in X$ (6.19) 成立，即 $F(\rho_n)^{k_n}\to\to S(t)$。

注 从定理 6.7 的证明可知如果 $\rho_n=t/k_n$，则 $F(\rho_n)^{k_n}$ 到 $S(t)$ 的收敛在 t 的有界区间上是一致的。

现在我们转向一个具体例子。设 $X=BU([-\infty,\infty])$是所有 R^1 上有界的一致连续实值函数的空间。并且考虑以下经典热方程的初值问题。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty<x<\infty,\ t>0. \\ u(0,x)=f(x), & -\infty<x<\infty,\end{cases} \tag{6.20}$$

这里 $f\in X$。我们意在证明 (6.20) 的解 $u(t,x)$ 的存在性和唯一性。而且，我们亦将得到解的一个数值逼近。这将通过用一个差分方程代替 (6.20) 中的微分方程来实现。

为了化微分方程为差分方程，我们考虑对一给定的 n 和 τ_n 定义在 (x,t)平面中的格点$\left(\dfrac{k}{n},\ l\tau_n\right)$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$，$l=0,1,2,\cdots$ 上的函数。我们令 $u\left(\dfrac{k}{n},\ l\tau_n\right)=u_{k,l}$。

一个对应于 (6.20) 中的微分方程的适当的差分方程是

$$\tau_n^{-1}(u_{k,l+1}-u_{k,l})=n^2(u_{k+1,l}-2u_{k,l}+u_{k-1,l}). \tag{6.21}$$

重新排列 (6.21) 我们有

$$u_{k,l+1}=(1-2n^2\tau_n)u_{k,l}+n^2\tau_n(u_{k-1,l}+u_{k-1,l}). \tag{6.22}$$

于是如果 $u_{k,0}=f_k$ 是给定的，则我们能通过递推公式(6.22)计

算所有的 $u_{k,l}$。

为了用我们前面的结果，我们考虑 **Banach** 空间 $X_n = b$（即所有有界的实序列 $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 具有上确界范数的空间），并如在例 6.2 中一样定义算子 P_n 和 E_n。然后我们定义一个映 X_n 到 X_n 内的算子 $F(\tau_n)$ 如下：

$$F(\tau_n)\{u_{k,l}\} = \{u_{k,l+1}\}, \tag{6.23}$$

这里 $\{u_{k,l+1}\}$ 是从(6.22)中的 $\{u_{k,l}\}$ 得到。命 $\alpha_n = 2n^2\tau_n$和选取 τ_n 使得 $\alpha_n < 1$，于是

$$\begin{aligned}\|F(\tau_n)\{u_{k,l}\}\| &= \sup_k |u_{k,l+1}| \\ &\leqslant (1-\alpha_n)\sup_k |u_{k,l}| + \alpha_n \sup_k |u_{k,l}| = \sup_k |u_{k,l}|.\end{aligned} \tag{6.24}$$

因此$\|F(\tau_n)\| \leqslant 1$ 和定理 6.7 的稳定性条件 (6.7) 对 $\omega = 0$ 和$M = 1$ 成立。设

$$D = \left\{g : g,\ \frac{dg}{dx},\ \frac{d^2g}{dx^2} \in X\right\}.$$

显然 D 在 X 中稠密。对于 $f \in D$ 我们有

$$\begin{aligned}&\|\tau_n^{-1}(F(\tau_n) - I)P_n f - P_n f''\|_n \\ &= \sup_k \left| n^2\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - 2f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right) - f''\left(\frac{k}{n}\right)\right|.\end{aligned} \tag{6.25}$$

因为 $f \in D$，所以 $f''(x)$ 是在 R^1 上一致连续，因此(6.25) 的右端当 $n \to \infty$ 时趋于零。于是定理 6.7 的假设 (6.8)对于由 $Af = f''$ 定义在 D 上的算子 A 所满足。

最后，为了应用定理 6.7 到我们的问题我们必须证明对某一 $\lambda > 0$，$\lambda I - A$ 的值域在 X 中稠密。命 $\lambda = 1$，则我们必须证明对于一个元素 $h \in X$ 的稠密集，微分方程

$$f - f'' = h \tag{6.26}$$

有一个解 $f \in D$。我们将指出这对任意 $h \in X$ 是真的。设 $h \in X$，考虑函数

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x}\int_{x}^{\infty} h(\xi)e^{-\xi}d\xi + e^{-x}\int_{-\infty}^{x} h(\xi)e^{\xi}d\xi\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{-|\xi - x|}d\xi. \tag{6.27}$$

容易证明 $f \in D$，$\|f\| \leqslant \|h\|$ 和 f 实际上是 (6.26) 的解。

因此定理 6.7 的所有条件被满足。我们断言 A 的闭包是一个 X 上 C_0 收缩半群 $S(t)$ 的无穷小生成元。在我们的特殊情形下不难证明 A 是闭的，因此 A 本身是 $S(t)$ 的无穷小生成元。这个半群如我们在下一章将更详细地看到的那样是初值问题 (6.20) 的解。

又选择一个序列 k_n 使得 $\tau_n k_n \to t$ 和 $2n\tau_n = \alpha_n \leqslant \eta < 1$，从定理 6.7 我们得到

$$\|F(\tau_n)^{k_n}P_n f - P_n S(t)f\|_n \to 0, \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时}. \tag{6.28}$$

即由差分方程递推计算出的在点 $\left(\frac{k}{n}, l\tau_n\right)$ 的值收敛到热方程(6.20)在(x,t)处的解，这里当 $n\to\infty$时，$\frac{k}{n}\to x$，$l\tau_n \to t$.

第四章　抽象 Cauchy 问题

§4.1　齐次的初值问题

设 X 是 **Banach** 空间，A 是一个映 $D(A)\subset X$ 到 X 内的线性算子，给定 $x\in X$，对于 A 和初值 x 的抽象 **Cauchy** 问题是求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=Au(t),\ t>0,\\ u(0)=x,\end{cases}\tag{1.1}$$

的一个解 $u(t)$，这里一个解的意义是这样的，一个 X 值函数 $u(t)$ 使得 $u(t)$ 对于 $t\geqslant 0$ 是连续的，对于 $t>0$ 是连续可微的和 $u(t)\in D(A)$，并且满足 (1.1)。注意因为对于 $t>0$，$u(t)\in D(A)$ 和 u 在 $t=0$ 连续，所以对于 $x\notin\overline{D(A)}$，(1.1) 不可能有解。

由第一章的结果显然如果 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，则对于 A 和每一 $x\in D(A)$ 抽象 **Cauchy** 问题有一个解，即 $u(t)=T(t)x$（见定理 1.2.4）。不难证明对 $x\in D(A)$，$u(t)=T(t)x$ 是 (1.1) 的唯一的解。实际上，正如我们将在下面的定理 1.2 中看到的，初值问题 (1.1) 解的唯一性可在更弱的假设下得到。

引理1.1　设 $u(t)$ 是 $[0,T]$ 上的一个连续的 X 值函数，如果

$$\left\|\int_0^T e^{ns}u(s)\,ds\right\| \leqslant M \quad \text{对于 } n=1,2,\cdots \text{成立,} \tag{1.2}$$

则在 $[0,T]$ 上，$u(t)\equiv 0$。

证明 设 $x^*\in X^*$ 和 $\varphi(t)=\langle x^*, u(t)\rangle$，则显然 φ 在 $[0,T]$ 上连续和

$$\left|\int_0^T e^{ns}\varphi(s)\,ds\right| = \left|\left\langle x^*, \int_0^T e^{ns}u(s)\,ds\right\rangle\right|$$

$$\leqslant \|x^*\|\cdot M = M_1, \quad \text{对于 } n=1,2\cdots \text{成立。} \tag{1.3}$$

我们将指出 (1.3) 蕴涵在 $[0,T]$ 上 $\varphi(t)\equiv 0$。因为 $x^*\in X^*$ 是任意的，所以在 $[0,T]$ 上 $u(t)\equiv 0$。

考虑级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn\tau}=1-\exp\{-e^{n\tau}\}.$$

这个级数在有界区间上关于 τ 一致收敛，因此

$$\left|\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn(t-T+s)}\varphi(s)\,ds\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}e^{kn(t-T)}\left|\int_0^T e^{kns}\varphi(s)\,ds\right|$$

$$\leqslant M_1(\exp\{e^{n(t-T)}\}-1). \tag{1.4}$$

对于 $t<T$，当 $n\to\infty$ 时，(1.4) 的右端趋于零。另一方面我们有

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}e^{kn(t-T+s)}\varphi(s)\,ds$$

$$=\int_0^T (1-\exp\{-e^{n(t-T+s)}\})\varphi(s)\,ds. \tag{1.5}$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理我们看到当 $n\to\infty$ 时，(1.5)

的右端收敛到 $\int_{T-t}^{T}\varphi(s)ds$，这同(1.4)一起即得对每一 $0\leqslant t<T$，$\int_{T-t}^{T}\varphi(s)ds=0$，由此推出在 $[0,T]$ 上 $\varphi(t)\equiv 0$。

定理1.2 设 A 是一个稠定义的线性算子。如果对一切实 $\lambda\geqslant\lambda_0$，$R(\lambda;A)$ 存在和

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\lambda^{-1}\log\|R(\lambda;A)\|=0,$$

则对每一 $x\in X$，初值问题 (1.1) 至多有一个解。

证明 首先注意 $u(t)$ 是(1.1)的一个解当且仅当 $e^{zt}u(t)$ 是初值问题

$$\frac{dv}{dt}=(A+zI)v,\quad v(0)=x$$

的一个解。因此我们可以用单位算子的常数倍平移算子 A，并假设对所有实数 $\lambda\geqslant 0$，$R(\lambda;A)$存在和满足 (1.6)。

设 $u(t)$是(1.1)满足 $u(0)=0$ 的一个解。我们证明 $u(t)\equiv 0$。为此对于 $\lambda>0$ 考虑函数 $t\to R(\lambda;A)u(t)$. 因为 $u(t)$是(1.1)的一个解，我们有

$$\frac{d}{dt}R(\lambda;A)u(t)=R(\lambda;A)Au(t)=\lambda R(\lambda;A)u(t)-u(t).$$

这就推出

$$R(\lambda;A)u(t)=-\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}u(\tau)d\tau. \tag{1.7}$$

由假设 (1.6)，对每一 $\sigma>0$ 有

$$\lim_{\lambda\to\infty}e^{-\sigma\lambda}\|R(\lambda;A)\|=0,$$

因此由 (1.7) 得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{t-\sigma} e^{\lambda(t-\sigma-\tau)}u(\tau)d\tau=0 \qquad (1.8)$$

由引理 1.1 我们推出 $u(\tau)=0$ 对于 $0\leqslant\tau\leqslant t-\delta$ 成立。因为 t 和 σ 是任意的，所以 $u(t)\equiv 0$ 对于 $t\geqslant 0$ 成立。

由定理 1.2 为了得到初值问题 (1.1) 解的唯一性不必假设 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元，或者等价地，对于某一 $\omega\in R^1$，$\rho(A)\supset(\omega,\infty)$ 和 $\|(\lambda-\omega)^n R(\lambda;A)^n\|\leqslant M$ 对于 $\lambda>\omega$ 和 $n=1,2,\cdots$ 成立，当然这对唯一性是充分的。同样为了得到 (1.1) 的解对于初值的稠密子集 D 的存在性不必假设 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元。依赖于初值集合 D 的存在性结果能在较弱的条件下得到。然而象解在 $[0,\infty)$ 上的可微性一样，为了对所有 $x\in D(A)$ 得到解在 $[0,\infty)$ 上的存在性和唯一性必须假设 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元。这就是我们的下一个定理的内容。

定理1.3 设 A 是一个具有非空预解集 $\rho(A)$ 的稠定义的线性算子。对每一初值 $x\in D(A)$，初值问题 (1.1) 在 $[0,\infty)$ 上有唯一的连续可微解 $u(t)$ 当且仅当 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 无穷小生成元。

证明 如果 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，则由定理 1.2.4，对每一 $x\in D(A)$，$T(t)x$ 是 (1.1) 具有初值 $x\in D(A)$ 的唯一解。而且 $T(t)x$ 对于 $0\leqslant t<\infty$ 是连续可微的。

另一方面，如果 (1.1) 对每一初值 $x\in D(A)$ 在 $[0,\infty]$ 上有唯一的连续可微解，则我们将看到 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。现在我们假设对每一 $x\in D(A)$，初值问题 (1.1) 在 $[0,\infty)$ 上有唯一的连续可微的解，我们用

$u(t;x)$ 表示。

对于 $x \in D(A)$，我们定义图象范数 $|x|_G = \|x\| + \|Ax\|$，因为 $\rho(A) \neq \phi$，所以 A 是闭的。因此赋予图象范数的$D(A)$是一个 **Banach** 空间，我们以 $[D(A)]$ 表示。设 X_{t_0} 是映 $[0, t_0]$ 到 $[D(A)]$ 内的连续函数具有上确界范数的 **Banach** 空间。我们考虑对于 $0 \leqslant t \leqslant t_0$，由 $Sx = u(t;x)$ 定义的映象 S: $[D(A)] \to X_{t_0}$。由 (1.1)的线性性和解的唯一性 S 显然是定义在整个 $[D(A)]$ 上的线性算子。算子 S 是闭的。事实上，如果在 $[D(A)]$ 中 $x_n \to x$ 和在 X_{t_0} 中 $Sx_n \to v$，则由 A 的闭性和

$$v(t;x_n) = x_n + \int_0^t Au(\tau;x_n)\,d\tau$$

当 $n \to \infty$ 时得

$$v(t) = x + \int_0^t Av(\tau)\,d\tau.$$

由此推出 $v(t) = u(t;x)$ 和 S 是闭的。因此由闭图象定理，S 是有界的和

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} |u(t;x)|_G \leqslant G\,|x|_G. \tag{1.9}$$

现在我们用 $T(t)x = u(t;x)$ 定义一个映象 $T(t)$：$[D(A)] \to [D(A)]$。从 (1.1) 的解的唯一性立刻推出 $T(t)$ 有半群性质。而从 (1.9)，得知 $T(t)$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 是一致有界的，这就推出（见定理 1.2.2 的证明）$T(t)$ 能通过 $T(t)x = T(t-nt_0)T(t_0)^n x$，$nt_0 \leqslant t < (n_0+1)t$ 延拓成 $[D(A)]$ 上的一个半群，并满足 $|T(t)x|_G \leqslant Me^{\omega t}|x|_G$。

以下我们证明

$$T(t)Ay = AT(t)y, \text{ 对于 } y \in D(A^2) \text{ 成立.} \tag{1.10}$$

命

$$v(t)=y+\int_0^t u(s;\ Ay)ds, \tag{1.11}$$

我们有

$$v'(t)=u(t;\ Ay)=Ay+\int_0^t \frac{d}{ds}u(s;\ Ay)ds$$

$$=A(y+\int_0^t u(s;\ Ay)ds)=Av(t). \tag{1.12}$$

因为 $v(0)=y$，所以由(1.1)解的唯一性我们有 $v(t)=u(t;y)$，因此 $Au(t;y)=v'(t)=u(t;Ay)$，这就是(1.10)。

现在，因为 $D(A)$ 在 X 中稠密和由我们的假设 $\rho(A)\neq\phi$，所以 $D(A^2)$ 在 X 中稠密。设 $\lambda_0\in\rho(A)$，$\lambda_0\neq 0$ 是固定的，又设 $y\in D(A^2)$，如果 $x=(\lambda_0 I-A)y$，则由(1.10)知 $T(t)x=(\lambda_0 I-A)T(t)y$，因此

$$\|T(t)x\|=\|(\lambda_0 I-A)T(t)y\|\leqslant C\,|T(t)y|_G$$
$$\leqslant C_1 e^{\omega t}\,|y|_G. \tag{1.13}$$

但

$$|y|_G=\|y\|+\|Ay\|\leqslant C_2\|x\|.$$

这就推出

$$\|T(t)x\|\leqslant C_2 e^{\omega t}\|x\|. \tag{1.14}$$

因此根据连续性 $T(t)$ 能延拓到整个 X。经这种延拓后，$T(t)$ 成为 X 上一个 C_0 半群。为了完成证明我们必须证明 A 是 $T(t)$ 的无穷小生成元。以 A_1 表示 $T(t)$ 的无穷小生成元，如果 $x\in D(A)$，则由 $T(t)$ 的定义我们有 $T(t)x=u(t;x)$，因此由我们的假设

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x, \text{ 对于 } t \geqslant 0 \text{ 成立。}$$

特别地，这推出 $\frac{d}{dt}T(t)x|_{t=0} = Ax$，因此 $A_1 \supset A$。

设 $Re\,\lambda > \omega$，$y \in D(A^2)$。由 (1.10) 和 $A_1 \supset A$ 得

$$e^{-\lambda t}AT(t)y = e^{-\lambda t}T(t)Ay = e^{-\lambda t}T(t)A_1 y. \quad (1.15)$$

从 0 到 ∞ 对 (1.15) 积分得

$$AR(\lambda; A_1)y = R(\lambda; A_1)A_1 y. \quad (1.16)$$

但 $A_1R(\lambda;A_1)y = R(\lambda;A_1)A_1y$，因此 $AR(\lambda;A_1)y = A_1R(\lambda;A_1)y$，对每一 $y \in D(A^2)$ 成立。因为 $A_1R(\lambda;A_1)$ 是一致有界的，A 是闭的和 $D(A^2)$ 在 X 中稠密，所以对每一 $y \in X$，$AR(\lambda;A_1)y = A_1R(\lambda;A_1)y$。由此推出 $D(A) \supset R(\lambda;A_1)$ 的值域 $= D(A_1)$ 和 $A \supset A_1$。因此 $A = A_1$。证毕。

我们的下一个定理描述了一种使得初值问题 (1.1) 对每一 $x \in X$ 有唯一解的结果。

定理1.4 若 A 是一个可微半群的无穷小生成元，则对每一 $x \in X$，初值问题 (1.1) 有唯一解。

证明. 唯一性由定理1.2推出。如果 $x \in D(A)$，则存在性由定理 1.3 推出。如果 $x \in X$，则由 $T(t)$ 的可微性和 2.2.4 节的结果，对每一 $x \in X$，$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x$ 对 $t > 0$ 成立和 $AT(t)x$ 对 $t > 0$ 是 Lipschitz 连续的，于是 $T(t)x$ 是 (1.1) 的解。

推论1.5 如果 A 是一个解析半群的无穷小生成元，则对每一 $x \in X$，初值问题 (1.1) 有唯一的解。

如果 A 是一个不可微 C_0 半群的无穷小生成元，则一般说来，如果 $x \notin D(A)$，初值问题 (1.1) 没有解。那么函数 $t \to T(t)x$ 是初值问题 (1.1) 的一个"广义解"，我们称它为一个 mild 解。有许多不同的方法定义初值问题 (1.1) 的广义解，但最终都归于 $T(t)x$。这种定义 (1.1) 的广义解的方法之一是如下：$[0,\infty)$ 上的一个连续函数 u 是 (1.1) 的一个广义解，如果存在 $x_n \in D(A)$ 使得当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to u(0)$ 和 $T(t)x_n \to u(t)$ 在有界区间上是一致的。显然，这样定义的广义解是不依赖于序列 $\{x_n\}$ 的和唯一的，并且如果 $u(0) \in D(A)$，则它给出 (1.1) 的解。显然按照广义解的这个定义，(1.1) 对每一 $x \in X$ 有一个广义解并且这个广义解就是 $T(t)x$。

§4.2 非齐次的初值问题

在本节中我们考虑非齐次的初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0, \\
u(0) = x,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

这里 $f:[0,T) \to X$。整个这一节我们将假设 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元，因此相应的齐次方程，即具有 $f \equiv 0$ 的方程，对每一初值 $x \in D(A)$ 有唯一的解。

定义2.1 一个函数 $u:[0,T) \to X$ 称为 (2.1) 在 $[0,T)$ 上的一个（古典）解，如果 u 在 $[0,T)$ 上是连续的，在$(0,T)$

上是连续可微的，并且对于 $0<t<T$，$u(t)\in D(A)$ 和满足 (2.1)。

设 $T(t)$ 是由 A 生成的 C_0 半群，u 是 (2.1) 的一个解，则对于 $0<s<t$，X 值函数 $g(s)=T(t-s)u(s)$ 是可微的和

$$\begin{aligned}\frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s)+T(t-s)u'(s)\\ &= -AT(t-s)u(s)+T(t-s)Au(s)+T(t-s)f(s)\\ &= T(t-s)f(s). \qquad (2.2)\end{aligned}$$

如果 $f\in L^1(0,T:X)$，则 $T(t-s)f(s)$ 是可积的，从 0 到 t 对 (2.2) 积分得

$$u(t)=T(t)x+\int_0^t T(t-s)f(s)ds. \qquad (2.3)$$

从而我们有

推论2.2 如果 $f\in L^1(0,T:X)$，则对每一 $x\in X$，初值问题 (2.1) 至多有一个解。如果它有一个解，则这个解是由 (2.3) 给出。

对每一 $f\in L^1(0,T:X)$ (2.3) 的右端是 $[0,T]$ 上的一个连续函数。自然我们把它作为 (2.1) 的一个广义解，即使它不是可微的和在定义 2.1 的意义下并不严格地满足方程。因此我们给予如下

定义2.3 设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，设 $x\in X$ 和 $f\in L^1(0,T:X)$。由下式给出的函数 $u\in C([0,T]:X)$

$$u(t)=T(t)x+\int_0^t T(t-s)f(s)ds,\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

称为初值问题 (2.1) 在 $[0,T]$ 上的 **mild** 解。

初值问题 (2.1) 的 mild 解的定义和 $f\equiv0$ 时 $T(t)x$ 作为相应的齐次方程的 mild 解的定义是一致的。因此显然并非 (2.1) 的每一个 mild 解都是一个（古典）解，甚至在 $f\equiv0$ 的情形。

对于 $f\in L^1(0,T:X)$ 由定义 2.3 初值问题(2.1) 有唯一的 mild 解。我们现在感兴趣的是进一步加强对 f 的条件使得对 $x\in D(A)$，mild 解成为一个（古典）解，同时也就证明在这些条件下，对于 $x\in D(A)$，(2.1)的解存在。

首先我们指出 f 的连续性一般并不能保证对于 $x\in D(A)$ (2.1) 的解的存在性。事实上，设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。又设 $x\in X$ 使得对任意 $t\geqslant0$, $T(t)x\notin D(A)$。设 $f(s)=T(s)x$，则 $f(s)$ 对于 $s\geqslant0$ 连续，考虑初值问题。

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=Au(t)+T(t)x, & t>0\\ u(0)=0\end{cases}\qquad(2.4)$$

我们断言即使 $u(0)=0\in D(A)$，(2.4) 也没有解，事实上，(2.4) 的 mild 解是

$$u(t)=\int_0^t T(t-s)T(s)xds=tT(t)x.$$

但对于 $t>0$，$tT(t)x$ 不是可微的，因此不能是(2.4)的解。

因此为了证明 (2.4) 的解的存在性我们必须要求比 f 的连续性更多的条件。我们从一个对于初值问题 (2.1) 的解的存在性的一般准则开始。

定理2.4 设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。设 $f\in L^1(0,T;X)$ 在 $(0,T)$ 上连续和

$$v(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)ds \quad 0\leqslant s\leqslant T. \qquad (2.5)$$

则初值问题 (2.1) 对每一 $x\in D(A)$ 在 $[0, T)$ 上有一解 u，如果以下条件之一成立：

(i) $v(t)$ 在 $(0,T)$ 上是连续可微的。

(ii) $v(t)\in D(A)$ 对于 $0<t<T$ 成立和 $AV(t)$ 在$(0,T)$上是连续的。

此外，如果对某 $x\in D(A)$，(2.1) 在 $[0,T)$ 上有一解 u，则 v 满足 (i) 和 (ii)。

证明 如果对某 $x\in D(A)$ 初值问题 (2.1) 有一解 u，则这个解由 (2.3) 给出。因而对 $t>0$，作为两个可微函数的差 $v(t)=u(t)-T(t)x$ 是可微的，和 $v'(t)=u'(t)-T(t)Ax$ 显然在$(0,T)$上连续，因此 (i) 被满足。又如果 $x\in D(A)$，则对于 $t\geqslant 0$，$T(t)x\in D(A)$，因此对于 $t>0$，$v(t)=u(t)-T(t)x\in D(A)$ 和 $Av(t)=Au(t)-AT(t)x=u'(t)-f(t)-T(t)Ax$在 $(0,T)$ 上连续，于是 (ii) 也被满足。

另一方面，对 $h>0$ 容易验证恒等式

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t)=\frac{v(t+h)-v(t)}{h}-\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \qquad (2.6)$$

由 f 的连续性显然当 $h\to 0$ 时，(2.6) 的右端的第三项有极限 $f(t)$。如果 $v(t)$ 在$(0,T)$ 上是连续可微的，则由 (2.6) 得 $v(t)\in D(A)$，$0<t<T$ 和 $Av(t)=v'(t)-f(t)$。因为 $v(0)=0$，所以 $u(t)=T(t)x+v(t)$ 是初值问题 (2.1) 对 $x\in D(A)$ 的解。如果 $v(t)\in D(A)$，则由 (2.6) 知 $v(t)$ 在 t 是右可微的，v 的右导数 $D^+v(t)$ 满足 $D^+v(t)=Av(t)+$

$f(t)$，因为 $D^{+}v(t)$ 是连续的，所以 $v(t)$ 是连续可微的和 $v'(t)=Av(t)+f(t)$。又因 $v(0)=0$，故 $u(t)=T(t)x+v(t)$ 是 (2.1) 对 $x\in D(A)$ 的解。证毕。

由定理 2.4 我们得到下面两个有用的推论。

推论2.5 设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 $f(t)$ 在 $[0,T]$ 上是连续可微的，则对每一 $x\in D(A)$，初值问题 (2.2) 在 $[0,T]$ 上有一个解。

证明 我们有

$$v(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)ds=\int_0^t T(s)f(t-s)ds. \tag{2.7}$$

显然由 (2.7)，$v(t)$ 对 $t>0$ 是可微的，且其导数

$$v'(t)=T(t)f(0)+\int_0^t T(s)f'(t-s)ds$$

$$=T(t)f(0)+\int_0^t T(t-s)f'(s)ds$$

在 $(0,T)$ 上是连续的。因此由定理 2.4 (i) 即得所证。

推论2.6 设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，设 $f\in L^1(0,T:X)$ 在 $(0,T)$ 上是连续的。如果 $f(s)\in D(A)$，$0<s<T$ 和 $Af(s)\in L^1(0,T:X)$，则对每一 $x\in D(A)$，初值问题 (2.1) 在 $[0,T)$ 上有一个解。

证明 由所给的条件，对 $s>0$，$T(t-s)f(s)\in D(A)$ 和 $AT(t-s)f(s)$ 是可积的。因此由 (2.5) 定义的 $v(t)$ 满足 $v(t)\in D(A)$，$t>0$ 和

$$Av(t)=A\int_0^t T(t-s)f(s)ds=\int_0^t T(t-s)Af(s)ds$$

是连续的。由定理 2.4 (ii) 即得所证结果。

做为上述结果的一个推论我们可以证明

定理2.7 设 $f\in L^1(0,T:X)$，如果 u 是初值问题(2.1)在[0, T]上的 mild 解，则对每一 $T'<T$，u 是(2.1)的解在[0,T']上的一致极限。

证明 假设 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$，设 $x_n\in D(A)$ 满足 $x_n\to x$ 和 $f_n\in C^1([0,T]:X)$ 满足在 $L^1(0,T:X)$ 中 $f_n\to f$。由推论 2.5 对每一 $n\geqslant 1$，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du_n(t)}{dt}=Au_n(t)+f_n(t), & t>0, \\ u_n(0)=x_n, \end{cases} \tag{2.8}$$

在 $[0,T)$ 上有解 $u_n(t)$ 满足

$$u_n(t)=T(t)x_n+\int_0^t T(t-s)f_n(s)ds.$$

如果 u 是 (2.1) 在 $[0,T]$ 上的 mild 解，则

$$\|u_n(t)-u(t)\|\leqslant Me^{\omega t}\|x_n-x\|+\int_0^t Me^{\omega(t-s)}\|f_n(s)-f(s)\|ds$$

$$\leqslant Me^{\omega T}\left(\|x_n-x\|+\int_0^T\|f_n(s)-f(s)\|ds\right), \tag{2.9}$$

并且结果立刻由 (2.9) 推出。

我们以关于初值问题 (2.1) 的另一种解，即强解的概念的一些注记来结束本节。

定义2.8 一个 $[0,T]$ 上几乎处处可微并使得 $u'\in L^1(0,T:X)$ 的函数 u 称为初值问题(2.1)的一个强解，如果 $u(0)=x$ 和在 $[0,T]$ 上 $u'(t)=Au(t)+f(t)$ a.e.成立。

我们注意当 $A=0$ 和 $f\in C^1(0,T:X)$时初值问题(2.1)通常没有解，除非 f 是连续的。然而它总有一个强解由 $u(t)=$

$u(0)+\int_0^t f(s)ds$ 给出。容易证明如果 u 是 (2.1) 的一个强解和 $f\in L^1(0,T:X)$，则 u 由 (2.3) 给出。因此它是 (2.1) 的一个 mild 解并且是 (2.1) 的唯一的强解。一个自然的问题是确定什么时候一个 mild 解是一个强解，不难指出，用本质上和定理 2.4 的证明相同的证明，我们有

定理2.9 设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，$f\in L^1(0,T:X)$ 和

$$v(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)ds,\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

则对每一$x\in D(A)$，初值问题(2.1) 在 $[0,T]$ 上有一强解 u，如果以下条件之一成立：

(i) $v(t)$ 在 $[0,T]$ 上是 $a.e.$ 可微的和 $v'(t)\in L^1(0,T:X)$。

(ii) 在 $[0,T]$ 上 $v(t)\in D(A)$ $a.e.$ 和 $Av(t)\in L^1(0,T:X)$。

此外，如果 (2.1) 对每一 $x\in D(A)$，在 $[0,T]$ 上有一强解，则 v 满足 (i) 和 (ii)。

作为定理 2.9 的一个推论我们有

推论2.10 设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 f 在 $[0,T]$ 上是 $a.e.$ 可微的，则对每一 $x\in D(A)$，初值问题 (2.1) 在 $[0,T]$ 上有唯一的强解。

一般来说，f 在 $[0,T]$ 上的 Lipschitz 连续性不能保证 (2.1) 对于 $x\in D(A)$ 的强解的存在性。然而如果 X 是自反的和 f 在 $[0,T]$ 上 Lipschitz连续，即

$\|f(t_1)-f(t_2)\|\leqslant C|t_1-t_2|$，对于 $t_1,t_2\in[0,T]$ 成立，

则由一个经典结果，f 是 $a.e.$ 可微的和 $f'\in L^1(0,T:X)$。

因此推论 2.10 推出

推论2.11 设 X 是自反的 **Banach** 空间，A 是一个 X 上的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 f 在 $[0,T]$ 上是 **Lipschitz** 连续的，则对每一 $x\in D(A)$，初值问题(2.1) 在 $[0,T]$ 上有唯一的强解 u 如下：

$$u(t)=T(t)x+\int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

§4.3 关于解析半群的 mild 解的正则性

设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，$f\in L^1(0,T:X)$. 在上一节我们定义了初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=Au(t)+f(t),\\ u(0)=x,\end{cases}\tag{3.1}$$

的 mlid 解的连续函数

$$u(t)=T(t)x+\int_0^t T(t-s)f(s)ds.\tag{3.2}$$

我们看到如果进一步加强 f 的条件，例如 $f\in C^1([0,T]:X)$，则 mild 解 (3.2) 成为一个（古典）解，即 (3.1) 的一个连续可微的解。如果 A 是一个解析半群的无穷小生成元，则我们有更强的结果。例如我们将看到（推论 3.3）在这种情形 f 的 Hölder 连续性已经蕴涵了 mild 解 (3.2) 是 (3.1) 的一个解。

我们首先证明如果 $T(t)$ 是一个解析半群和 $f\in L^p(0,T:X)$，其中 $p>1$，则 mild 解(3.2) 是 Hölder 连续的。更确切地，我们有

定理3.1 设 A 是一个解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，$f\in L^p(0,T:X)$，其中 $1<p<\infty$。如果 u 是 (3.1) 的 mild 解，则对于每一 $\varepsilon>0$，u 关于指数 $\frac{p-1}{p}$ 在$[\varepsilon,T]$上是 Hölder 连续的。此外如果 $x\in D(A)$，则 u 关于同样的指数在 $[0,T]$ 上是 Hölder 连续的。

证明 设在 $[0,T]$ 上 $\|T(t)\|\leqslant M$，因为 $T(t)$ 是解析的，所以存在常数 C 使得在 $(0,T]$ 上，$\|AT(t)\|\leqslant Ct^{-1}$。由此推出对每一 $\varepsilon>0$，$T(t)x$在 $[\varepsilon,T]$ 上是 Lipschitz 连续的。又如果 $x\in D(A)$，则 $T(t)x$ 在 $[0,T]$ 上是 Lipschitz 连续的。因此只须证明如果 $f\in L^p(0,T:X)$，其中 $1<p<\infty$，则 $v(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)ds$ 关于指数 $\frac{p-1}{p}$ 在 $[0,T]$ 上是 Höldsr 连续的。对 $h>0$ 我们有

$$v(t+h)-v(t)=\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)ds$$

$$+\int_0^t(T(t+h-s)-T(t-s))f(s)ds=I_1+I_2.$$

我们分别估计 I_1 和 I_2。对于 I_1 我们用 Hölder 不等式得到

$$\|I_1\|\leqslant M\int_t^{t+h}\|f(s)\|ds\leqslant Mh^{(p-1)/p}\left(\int_t^{t+h}\|f(s)\|^p ds\right)^{1/p}$$

$$\leqslant M\|f\|_p h^{(p-1)/p}, \tag{3.3}$$

这里 $|f|_p=\left(\int_0^T\|f(s)\|^p ds\right)^{1/p}$ 是 f 在 $L^p(0,T:X)$ 中的范数。为了估计 I_2 我们注意，对 $h>0$，

$\|T(t+h)-T(t)\|\leqslant 2M$，对于 $t,t+h\in[0,T]$ 成立。

和

$$\|T(t+h)-T(t)\|\leqslant C\frac{h}{t}，对于\ t,t+h\in(0,T]\ 成立。$$

因此

$$\|T(t+h)-T(t)\|\leqslant C_1\mu(h,t)=C_1\min\left(1,\frac{h}{t}\right)$$

$$对于\ t,t+h\in[0,T]\ 成立， \qquad (3.4)$$

这里 C_1 是一个满足 $C_1\geqslant\max(2M,C)$ 的常数。利用 (3.4) 和 Hölder 不等式我们得到

$$\|I_2\|\leqslant C_1\int_0^t\mu(h,t-s)\|f(s)\|ds$$

$$\leqslant C_1|f|_p\left(\int_0^t\mu(h,t-s)^{p/(p-1)}ds\right)^{(p-1)/p}. \qquad (3.5)$$

但因为 $\mu\geqslant 0$，所以我们有

$$\int_0^t\mu(h,t-s)^{p/(p-1)}ds=\int_0^t\mu(h,\tau)^{p/(p-1)}d\tau$$

$$\leqslant\int_0^\infty\mu(h,\tau)^{p/(p-1)}d\tau=ph.$$

综合 (3.5) 和最后的不等式我们得到 $\|I_2\|\leqslant\text{const}\cdot h^{(p-1)/p}$.

我们现在转向关于 f 保证 (3.1) 的 mild 解是强解的条件。

定理3.2 设 A 是一个解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。设 $f\in L^1(0,T:X)$ 和对每一 $0<t<T$ 存在 $\delta_t>0$ 和一个连续

实值函数 $W_t(\tau):[0,\infty)\to[0,\infty)$ 使得

$$\|f(t)-f(s)\|\leqslant W_t(|t-s|) \tag{3.6}$$

和

$$\int_0^{\delta t}\frac{W_t(\tau)}{\tau}d\tau<\infty. \tag{3.7}$$

则对每一 $x\in X$，(3.1) 的 mild 解是一个古典解。

证明 因为 $T(t)$ 是一个解析半群，所以对于每一 $x\in X$，$T(t)x$是具有初值x的齐次方程的解。因此为了证明定理由定理2.4只须证明$v(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)ds\in D(A)$ 对于$0<t<T$成立和 $Av(t)$ 在这个区间上是连续的。为此我们写

$$\begin{aligned}v(t)&=x_1(t)+v_2(t)\\&=\int_0^t T(t-s)(f(s)-f(s))ds+\int_0^t T(t-s)f(t)ds. \end{aligned}\tag{3.8}$$

由定理 1.2.4(b)知 $v_2(t)\in D(A)$ 和 $Av_2(t)=(T(t)-I)f(t)$。因为我们定理的假设推出 f 在 $(0,T)$ 上连续，所以$Av_2(t)$在 $(0,T)$ 上是连续的。为了证明关于 v_1的同样的结论我们定义

$$v_{1,\varepsilon}(t)=\int_0^{t-\varepsilon}T(t-s)(f(s)-f(t))ds,\ \text{对于}\ t\geqslant\varepsilon \tag{3.9}$$

和

$$Av_{1,\varepsilon}(t)=0\quad\text{对于}\ t<\varepsilon. \tag{3.10}$$

从这定义，显然当 $\varepsilon\to0$ 时，$v_{1,\varepsilon}(t)\to v_1(t)$。同样显然地，$v_{1,\varepsilon}(t)\in D(A)$ 和对于 $t\geqslant\varepsilon$

$$Av_{1,\varepsilon}(t)=\int_0^{t-\varepsilon}AT(t-s)(f(s)-f(t))ds. \tag{3.11}$$

从 (3.6) 和 (3.7)，对于 $t>0$，当 $\varepsilon\to0$ 时 $Av_{1,\varepsilon}(t)$ 收敛和

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Av_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds.$$

于是由 A 的闭性推出对于 $t>0$，$v_1(t)\in D(A)$ 和

$$Av_1(t) = \int_0^t AT(t-s)(f(f)-t(t))ds. \qquad (3.12)$$

为了结束证明我们必须指出 $Av_1(t)$ 在 $(0,T)$ 上是连续的，对于 $0<\delta<t$ 我们有

$$Av_1(t) = \int_0^\delta AT(t-s)(f(s)-f(t))ds$$
$$+\int_\delta^t AT(t-s)(f(s)-f(t))ds. \qquad (3.13)$$

对于固定的 $\delta>0$，(3.13) 的右端的第二项积分是 t 的一个连续函数，而第一项积分关于 t 一致地是 $O(\delta)$。因此 $Av_1(t)$ 是连续的。证毕。

设 I 是一个区间，一个函数 $f: I\to X$ 称为关于指数 θ，$0<\theta<1$ 在 I 上是 Hölder 连续的，如果存在常数 L 使得

$$\|f(t)-f(s)\|\leqslant L|t-s|^\theta \text{ 对于 } s,t\in I \text{ 成立.} \qquad (3.14)$$

它称为局部 Hölder 连续的，如果对每一点 $t\in I$ 有一个邻域使得 f 在这个领域上是 Hölder 连续的，容易验证如果 I 是紧的，则当 f 是局部 Hölder 连续的时它也是 Hölder 连续的。我们用 $C^\theta(I:X)$表示所有具有指数 θ 在 I 上的 Hölder 连续函数的族。

定理 3.2 的一个直接推论是

推论3.3 设 A 是一个解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 $f\in L^1(0,T:X)$ 是在 $(0,T]$ 上局部 Höder 连续的，则对每一 $x\in X$，初值问题 (3.3) 有唯一的解 u。

在推论 3.3 的假设下关于解 u 的正则性能得到更多的结

果。这将在定理 3.5 中看到，在定理 3.5 的证明中我们需要以下

引理3.4 设 A 是一个解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，$f\in C^{\theta}([0,T]:X)$。如果

$$v_1(t)=\int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds. \tag{3.15}$$

则 $v_1(t)\in D(A)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 成立和 $Av_1(t)\in C^{\theta}([0,T]:X)$。

证明 $v_1(t)\in D(A)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 成立的事实是定理 3.2 的证明的一个直接推论。因此我们仅须证明 $Av_1(t)$ 的 **Hölder** 连续性。假设在 $[0,T]$ 上 $\|T(t)\|\leqslant M$ 和

$$\|AT(t)\|\leqslant Ct^{-1} \text{ 对于 } 0<t\leqslant T \text{ 成立}. \tag{3.16}$$

则对于每一 $0<s<t\leqslant T$ 我们有

$$\|AT(t)-AT(s)\|=\|\int_s^t A^2T(\tau)d\tau\|$$

$$\leqslant\int_0^t\|A^2T(\tau)\|d\tau\leqslant 4C\int_s^t\tau^{-2}d\tau=4Ct^{-1}s^{-1}(t-s). \tag{3.17}$$

设 $t\geqslant 0$ 和 $h>0$，则

$$\begin{aligned}Av_1(t+h)-Av_1(t)&=A\int_0^t(T(t+h-s)-T(t-s))(f(s)-f(t))ds\\&+A\int_0^t T(t+h-s)(f(t)-f(f+h))ds\\&+A\int_t^{t+h}T(t+h-s)(f(s)-f(t+h))ds\\&=I_1+I_2+I_3.\end{aligned} \tag{3.18}$$

我们分别估计三项中的每一项。首先由 (3.14) 和 (3.17) 我们有

$$\|I_1\| \leqslant \int_0^t \|AT(t+h-s)-AT(t-s)\| \cdot \|f(s)-f(s)\| ds$$

$$\leqslant 4CLh\int_0^t \frac{ds}{(t-s+h)(t-s)^{1-\theta}} \leqslant C_1 h^\theta. \qquad (3.19)$$

为了估计 I_2 我们利用定理 1.2.4 (b) 和 (3.14)，则

$$\|I_2\| = \|(T(t+h)-T(h))(f(t)-f(t+h))\|$$
$$\leqslant \|T(t+h)-T(h)\| \cdot \|f(t)-f(t+h)\|$$
$$\leqslant 2MLh^\theta. \qquad (3.20)$$

最后为了估计 I_3 我们利用 (3.16) 和 (3.14) 得到

$$\|I_3\| \leqslant \int_t^{t+h} \|AT(t+h-s)\| \cdot \|f(s)-f(t+h)\| ds$$

$$\leqslant CL\int_t^{t+h} (t+h-s)^{\theta-1} ds \leqslant C_2 h^\theta. \qquad (3.21)$$

综合 (3.18) 和估计 (3.19)，(3.20) 及 (3.21) 我们看到 $Av_1(t)$ 关于指数 θ 在 $[0,T]$ 上是 Hölder 连续的。

对于 A 生成一个解析半群和 f 是 Hölder 连续的情形的主要正则性结果是下面的

定理3.5 设 A 是一个解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，$f\in C^\theta([0,T]:X)$。如果 u 是初值问题 (3.1) 在 $[0,T]$ 上的解，则

(i) 对每一 $\delta>0$，$Au\in C^\theta([\delta,T];X)$ 和

$\in C^\theta([\delta,T];X)$。

(ii) 如果 $x\in D(A)$，则 Au 和 $\frac{du}{dt}$ 在 $[0,T]$上是连续的。

(iii) 如果 $x=0$ 和 $f(0)=0$，$Au, \frac{du}{dt} \in C^{\vartheta}([0,T]:X)$。

证明。 我们有

$$u(t)=T(t)x+\int_0^t T(t-s)f(s)ds=T(t)x+v(t).$$

因为由 (3.17)，对每一 $\delta>0$，$AT(t)x$ 在 $\delta\leqslant t\leqslant T$ 上是 **Lipschitz** 连续的，所以只须证明 $Av(t)\in C^{\vartheta}([\delta,T];X)$。为此我们象前面一样分解 v 成

$$v(t)=v_1(t)+v_2(t)$$
$$=\int_0^t T(t-s)(f(s)-f(t))ds+\int_0^t T(t-s)f(t)ds.$$

从引理 3.4，$Av_1(t)\in C^{\vartheta}([0,T]:X)$。因此剩下须证明对于每一 $\delta>0$，$Av_2(t)\in C^{\vartheta}([\delta,T]:X)$。但是 $Av_2(t)=(T(t)-I)f(t)$，并且因为 $f\in C^{\vartheta}([0,T]:X)$，我们仅须指出对每一 $\delta>0$，$T(t)f(t)\in C^{\vartheta}([\delta,T]:X)$。设 $t\geqslant\delta$ 和 $h>0$，那么

$$\|T(t+h)f(t+h)-T(t)f(t)\|$$
$$\leqslant\|T(t+h)\|\cdot\|f(t+h)-f(t)\|+\|T(t+h)-T(t)\|\cdot\|f(t)\|$$
$$\leqslant MLh^{\vartheta}+\frac{C}{\delta}h\|f\|_{\infty}\leqslant C_1h^{\vartheta}. \tag{3.22}$$

这里我们利用了(3.4)，(3.14) 和表示 $\|f\|_{\infty}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|$。

这就完成了 (i) 的证明。为了证明 (ii) 我们首先注意，如果 $x\in D(A)$，则 $AT(t)x\in C([0,T]:X]$，由引理 3.4，$Av_1(t)\in C^{\vartheta}([0,T):X)$。又因为 f 在 $[0,T]$ 上连续，剩下仅须证明在 $[0,T]$ 上 $T(t)f(t)$ 是连续的，由 (i) 显然 $T(t)f(t)$ 在

$(0,T]$ 上是连续的。而在 $t=0$ 的连续性容易从

$$\|T(t)f(t)-f(0)\|\leqslant\|T(t)f(0)-f(0)\|+M\|f(t)-f(0)\|$$

推出，这就完成了 (ii) 的证明。最后，为了证明 (iii)，在这种情形下我们再次只须证明 $T(t)f(t)\in C^{\vartheta}([0,T]:X)$。而这由

$$\begin{aligned}&\|T(t+h)f(t+h)-T(t)f(t)\|\\ &\leqslant\|T(t+h)\|\cdot\|f(t+h)-f(t)\|+\|(T(t+h)-T(t))f(t)\|\\ &\leqslant MLh^{\vartheta}+\left\|\int_t^{t+h}AT(\tau)f(t)d\tau\right\|\\ &\leqslant MLh^{\vartheta}+\int_t^{t+h}\|AT(\tau)(f(t)-f(0))\|d\tau\\ &\leqslant MLh^{\vartheta}+CL\int_t^{t+h}\tau^{-1}t^{\vartheta}d\tau\\ &\leqslant MLh^{\vartheta}+CL\int_t^{t+h}\tau^{\vartheta-1}d\tau\leqslant Ch^{\vartheta}\end{aligned}$$

推出，证毕。

我们以一个类似于定理 3.2 的结果来结束本节，其中关于 f 的连续模的条件由另一个正则性条件代替。

定理3.6 设 A 是一个解析半群的无穷小生成元，设 $0\in\rho(A)$。如果 $f(s)$ 是连续的，并且对于某一 $0<\alpha\leqslant1$，$f(s)\in D((-A)^{\alpha})$ 和 $\|(-A)^{\alpha}f(s)\|$ 是有界的，则对每一 $x\in X$，(3.1) 的 mild 解是一个古典解。

证明. 如同定理 3.2 的证明中一样只须证明 $v(t)\in D(A)$ 对于 $t>0$ 成立和 $Av(t)$ 对 $t>0$ 是连续的。因为 $T(t)$ 是解析的，所以 $T(t-s)f(s)\in D(A)$ 对于 $t>s$ 成立和由定理 2.6.13(c)

$$\|AT(t-s)f(s)\|=\|(-A)\|^{1-\alpha}T(t-s)(-A)^{\alpha}f(s)|$$

$$\leqslant C|t-s|^{\alpha-1}\|(-A)^{\alpha}f(s)\|.$$

因此 $AT(t-s)f(s)$ 是可积的和 $v(t)\in D(A)$，而且

$$Av(t)=\int_0^t AT(t-s)f(s)ds.$$

同时，$Av(t)$ 对于 $t>0$ 的连续性恰如在定理 3.2 中 $A_1v(t)$ 的连续性一样可得到证明。

§4.4 解的渐近性态

在这一节我们打算研究初值问题

$$\frac{du(t)}{dt}=Au(t)+f(u),\quad u(0)=x \tag{4.1}$$

解的渐近性态。我们首先从齐次问题，即 $f\equiv 0$ 的解 开 始。并寻找保证它们指数衰减的条件。

定理4.1 设 A 是一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果对某一 p，$1\leqslant p<\infty$，

$$\int_0^\infty\|T(t)x\|^p dt<\infty,\quad 对一切\ x\in X\ 成立。 \tag{4.2}$$

则存在常数 $M\geqslant 1$ 和 $\mu>0$ 使得 $\|T(t)\|\leqslant Me^{-\mu t}$。

证明 我们基先证明 (4.2) 蕴涵 $t\to\|T(t)\|$ 的有界性。设 $\|T(t)\|\leqslant M_1e^{\omega t}$，这里 $M_1\geqslant 1$ 和 $\omega\geqslant 0$。如果 $\omega=0$，则结论自明，因此我们假设 $\omega>0$。于是由 (4.2)，对每一 $x\in X$，当 $t\to\infty$ 时，$T(t)x\to 0$。事实上，如果这不成立，则我们能找到 $x\in X$，$\delta>0$ 和 $t_j\to\infty$ 使得 $\|T(t_j)x\|\geqslant\delta$，不失一般性

我们可设 $t_{j+1}-t_j>\omega^{-1}$。命 $\Delta_j=[t_j-\omega^{-1},t_j]$，则 $m(\Delta_j)\omega^{-1}>0$ 和区间 Δ_j 不重叠。对于 $t\in\Delta_j$ 我们有 $\|T(t)x\|\geqslant\delta(M_1e)^{-1}$。因此

$$\int_0^\infty\|T(t)x\|^p dt\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Delta_j}\|T(t)x\|^p dt$$

$$\geqslant\left(\frac{\delta}{M_1e}\right)^p\sum_{j=1}^{\infty}m(\Delta_j)=\infty.$$

这和 (4.2) 矛盾，因对此每一 $x\in X$，当 $t\to\infty$ 时，$T(t)x\to0$。于是一致有界性定理推出 $\|T(t)\|\leqslant M$ 对于 $t\geqslant0$ 成立。

其次考虑由 $Sx=T(t)x$ 定义的映象 $S: X\to L^p(R^+: X)$。由 (4.2)，S 定义在整个 X 上，不难看出 S 是闭的，因此由闭图象象定理 T 是有界的，即

$$\int_0^\infty\|T(t)x\|^p dt\leqslant M_2^p\|x\|^p. \tag{4.3}$$

设 $0<\rho<M^{-1}$，这里 $\|T(t)\|\leqslant M$。定义 $t_x(\rho)$ 如下

$$t_x(\rho)=sup\{t:\|T(s)x\|\geqslant\rho\|x\|,\ 0\leqslant s\leqslant t\}.$$

因为当 $t\to\infty$ 时，$\|T(t)x\|\to0$。所以 $t_x(\rho)$ 对每一 $x\in X$ 是有限的和正的。此外

$$t_x(\rho)\rho^p\|x\|^p\leqslant\int_0^{t_x(\rho)}\|T(t)x\|^p dt$$

$$\leqslant\int_0^\infty\|T(t)x\|^p dt\leqslant M_2^p\|x\|^p,$$

因此 $t_x(\rho)\leqslant(M_2/\rho)^p=t_0$。对于 $t>t_0$ 我们有

$$\|T(t)x\|\leqslant\|T(t-t_x(\rho))\|\cdot\|T(t_x(\rho))\|\leqslant M\rho\|x\|\leqslant\beta\|x\|,$$

这里 $0<\beta=M\rho<1$。最后，设 $t_1>t_0$ 是固定的，并设 $t=nt_1+s$，其中 $0\leqslant s<t_1$，则

$$\|T(t)\| \leqslant \|T(s)\| \cdot \|T(nt_1)\| \leqslant M\|T(t_1)\|^n$$
$$\leqslant M\beta^n \leqslant M' e^{-\mu t},$$

这里 $M' = M\beta^{-1}$ 和 $\mu = -1/t_1 \log\mu > 0$。证毕。

定理 4.1 表明如果 $T(t)x \in L^p(R^+ : X)$ 对每一 $x \in X$ 成立，则 $\|T(t)\| \leqslant Me^{-\mu t}$，对某 $M \geqslant 1$ 和 $\mu > 0$ 成立。现在我们对有关保证一个类似性态的 $T(t)$ 的无穷小生成元 A 的条件感兴趣。

对于一个有限维的 Banach 空间熟知如果 $\sup\{Re\lambda; \lambda \in \sigma(A)\} = \sigma < 0$，则 $\|T(t)\|$ 指数衰减。这种性态是有限维 Banach 空间中的线性算子仅有点谱的事实的一个推论。因为在一般 Banach 空间中并不是这种情况，因此人们并不期望在一般 Banach 空间中这一结果是真实的。

例4.2 对于 $[0,\infty]$ 上的可测函数 f，命

$$|f|_1 = \int_0^\infty e^s |f(s)|\, ds$$

和设 E 是 $[0,\infty]$ 上所有使得 $|f|_1 < \infty$ 的可测函数的空间，设 $X = E \cap L^p(0,\infty)$，其中 $1 < p < \infty$。容易看出，X 赋予范数 $\|f\| = |f|_1 + \|f\|_{L^p}$ 是一个 Banach 空间。在 X 中我们定义一个半群 $\{T(t)\}$ 如下

$$T(t)f(x) = f(x+t), \quad 对于\ t \geqslant 0. \tag{4.4}$$

由其定义容易验证$\{T(t)\}$是 X 上的一个 C_0 半群，且 $\|T(t)\| \leqslant 1$，选取 $f \in X$ 是区间 $[t, t+\varepsilon^p]$ 上的特征函数，其中 $\varepsilon > 0$。让 $\varepsilon \downarrow 0$ 得到 $\|T(t)\| \geqslant 1$ 对于 $t \geqslant 0$ 成立。因此 $\|T(t)\| = 1$ 对于 $t \geqslant 0$ 成立。

$\{T(t)\}$ 的无穷小生成元是如下给出：

$$D(A) = \{u;\ u\ 绝对连续，\ u' \in X\} \tag{4.5}$$

和

$$Au=u', \text{ 对于 } u\in D(A)。\tag{4.6}$$

设 $f\in X$ 并考虑方程

$$\lambda u-Au=\lambda u-u'=f。\tag{4.7}$$

经简单计算得到

$$u(t)=\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(t+s)ds=e^{\lambda t}\int_t^\infty e^{-\lambda s}f(s)ds。\tag{4.8}$$

是 (4.7) 的一个解。我们将证明如果 λ 满足 $Re\lambda>-1$，则由(4.8)给出的 u 在 $D(A)$ 中，因此 $\{\lambda;\ Re\lambda>-1\}\subset\rho(A)$。为了证明 $u\in D(A)$，由(4.7) 只须证明 $u\in X$，这由以下演算得出。

$$|u(t)|\leqslant e^{Re\lambda t}\int_t^\infty e^{-(Re\lambda+1)s}e^s|f(s)|ds$$
$$\leqslant e^{-t}\int_t^\infty e^s|f(s)|ds\leqslant e^{-s}|f|_1。$$

由此推出 $u\in L^p(0,\infty)$，和

$$|u|_1\leqslant\int_0^\infty\int_t^\infty e^{(Re\lambda+1)(t-s)}e^s|f(s)|ds\,dt$$
$$=\int_0^\infty\left(\int_0^s e^{(Re\lambda+1)(t-s)}ds\right)e^s|f(s)|ds$$
$$=(Re\lambda+1)^{-1}\int_0^\infty(1-e^{-(Re\lambda+1)s})e^s|f(s)|ds$$
$$\leqslant(Re\lambda+1)^{-1}|f|_1。$$

因此集 $\{\lambda:Re\lambda>-1\}$ 是 $\rho(A)$ 的一个子集，$\sigma=\sup\{Re\lambda:\lambda\in\sigma(A)\}\leqslant-1$。而 $\|T(t)\|$ 不是指数衰减的。

由例 4.2 我们断言：为了从谱条件 $\sup\{Re\lambda;\ \lambda\in\sigma(A)\}=\sigma<0$ 得到 $\|T(t)\|$ 的指数衰减必须对 $T(t)$ 或 A 补充进一步的条件。存在许多蕴涵这一结果的可能的假设。在这里

我们仅选取一个简单但相当有用的这种假设，即 A 是一个解析半群的无穷小生成元。

定理4.3 设 A 是一个解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果

$$\sigma = \sup\{Re\lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0,$$

则存在常数 $M \geqslant 1$ 和 $\mu > 0$ 使得 $\|T(t)\| \leqslant Me^{-\mu t}$.

证明 由 2.5 节的结果易知存在常数 $\omega \geqslant 0$, $M \geqslant 1$, $\delta > 0$ 和 $\lambda = \omega$ 的一个邻域 U 使得

$$\rho(A) \supset \Sigma = \{\lambda : |\arg(\lambda - \omega)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup U \qquad (4.9)$$

和

$$\|R(\lambda;A)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda - \omega|} \text{ 对于 } \lambda \in \Sigma \text{ 成立.} \qquad (4.10)$$

此外

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}R(\lambda;A)d\lambda, \qquad (4.11)$$

这里 Γ 由两条射线 $\Gamma_1 = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + \omega : \rho \geqslant 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta\}$

和$\Gamma_2 = \{\lambda = e^{-i\theta} + \omega : \rho \geqslant 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \delta\}$ 组成，且 Γ这样定向使得 $\mathrm{Im}\lambda$ 沿着 Γ 递增。(4.11) 中的收敛对于 $t > 0$ 是依一致算子拓扑的。由我们的假设 $R(\lambda;A)$ 是在三角形

$$\Delta = \{\lambda : Re\lambda > \sigma, \quad |\arg(\lambda - \omega)| \geqslant \theta\}$$

的邻域中解析的，这里 $0 > \sigma_1 > \sigma$. 由 Cauchy 定理，(4.11) 中的 Γ 可以不改变积分值的移动到路径 Γ'，这里 Γ' 由

$$\Gamma_1' = \{\lambda = \rho e^{i\theta} + \omega : \rho \geqslant \frac{\omega - \sigma_1}{|\cos\theta|}\}.$$

$$\Gamma_2' = \{Re\lambda = \sigma_1 : |\mathrm{Im}\lambda| \leqslant (\omega - \sigma_1)|\tan\theta|\}.$$

$$\Gamma_3' = \{\lambda = \rho e^{-i\theta} + \omega : \rho \geqslant \frac{\omega - \sigma_1}{|\cos\theta|}\}$$

组成和这样定向使得 $\mathrm{Im}\lambda$ 沿着 Γ' 递增。因此

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda$$

在 Γ_i', $i = 1, 2, 3$ 上估计 $\|T(t)\|$ 易得对于 $t \geqslant 1$ 和某常数 M_1, $\|T(t)\| \leqslant M_1 e^{\sigma_1 t}$。因为 $\|T(t)\| \leqslant M_2$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 成立，所以我们有 $\|T(t)\| \leqslant M e^{\sigma_1 t}$ 对于 $t \geqslant 0$ 成立，证毕。

现在我们考虑关于非齐次初值问题 (4.1) 的 mild 解的渐近性态的一些简单结果。

定理4.4 设 $\mu > 0$, A 是一个满足 $\|T(t)\| \leqslant Me^{-\mu t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。设 f 在 $[0, \infty)$ 上是有界的和可测的。如果

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f_0, \tag{4.12}$$

则 (4.1) 的 mild 解 $u(t)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = -A^{-1}f. \tag{4.13}$$

证明 因为 $\|T_1(t)\| \leqslant Me^{-\mu t}$, 所以 $0 \in \rho(A)$ (见定理 1.5.3) 和 $\|T(t)x\| \to 0$, 当 $t \to \infty$ 时。现在

$$\nu(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)(f(s) - f_0)ds$$
$$+ \int_0^t T(t-s)f_0 ds = \nu_1(t) + \nu_2(t).$$

显然（见定理 1.3.1 的证明），

$$\lim_{t\to\infty} v_2(t)=\int_0^\infty T(t)f_0dt=R(0;A)f_0=-A^{-1}f_0.$$

为完成证明我们必须指出 $v_1(t)\to 0$，当 $t\to\infty$ 时。

给定 $\varepsilon>0$，我们选取 t_0 使得对于 $t>t_0$

$$\|f(t)-f_0\|<\frac{\varepsilon\mu}{2M}. \tag{4.14}$$

然后命 $\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\geq 0}\|f(t)\|$，我们有

$$\|v_1(t)\|\leqslant\int_0^{t_0}\|T(t-s)\|\cdot\|f(s)-f_0\|ds$$

$$+\int_{t_0}^t\|T(t-s)\|\cdot\|f(s)-f_0\|ds\leqslant 2\|f\|_\infty M\mu^{-1}e^{-\mu(t-t_0)}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

选取 $t>t_0$ 充分大，使得右端第一项小于 $\varepsilon/2$，于是对于充分大的 t，$\|v_1(t)\|<\varepsilon$。证毕。

一个类似的结果如下：

定理4.5 设 $\mu>0$，A 是一个满足 $\|T(t)\|\leqslant Me^{-\mu t}$ 的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。设 f 在 $[0,\infty)$ 上是连续的和有界的。如果 $u_\varepsilon(t)$ 是

$$\varepsilon\frac{du_\varepsilon(t)}{dt}=Au_\varepsilon(t)+f(t),\quad u_\varepsilon(0)=x,\quad \varepsilon>0 \tag{4.15}$$

的 mild 解，则

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(t)=-A^{-1}f(t), \tag{4.16}$$

并且极限在每一区间 $[\delta,T]$ 上是一致的，这里 $0<\delta<T$。

证明 算子 $\varepsilon^{-1}A$ 显然是 C_0 半群 $T_\varepsilon(t)=T(t/\varepsilon)$ 的无穷小生成元，我们有

$$u_\varepsilon(t) = T_\varepsilon(t)x + \varepsilon^{-1}\int_0^t T_\varepsilon(t-s)f(s)ds. \qquad (4.17)$$

因为 $\|T_\varepsilon(t)\| \leqslant Me^{-(\mu/\varepsilon)t}$，所以当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\|T_\varepsilon(t)x\| \to 0$ 在每一区间 $[\delta, T]$ 上是一致的。现在

$$\begin{aligned}
x_\varepsilon(t) &= \varepsilon^{-1}\int_0^t T_\varepsilon(t-s)f(s)ds \\
&= \varepsilon^{-1}\int_0^t T_\varepsilon(t-s)[f(s)-f(s)]ds + \varepsilon^{-1}\int_0^t T_\varepsilon(t-s)f(t)ds \\
&= v_{\varepsilon 1}(t) + v_{\varepsilon 2}(t).
\end{aligned}$$

对于 $v_{\varepsilon 1}(t)$ 我们有

$$\begin{aligned}
\|v_{\varepsilon 1}(t)\| &\leqslant \varepsilon^{-1}\int_0^t \|T_\varepsilon(t-s)\| \|f(s)-f(t)\| ds \\
&\leqslant \varepsilon^{-1}\int_0^t e^{-\mu\tau/\varepsilon}\|f(t-\tau)-f(t)\|d\tau \\
&\leqslant M\varepsilon^{-1}\int_0^{r\varepsilon} e^{-\mu\tau/\varepsilon}\|f(t-\tau)-f(t)\|d\tau + 2\|f\|_\infty M\mu^{-1}e^{-\mu r} \\
&= M\int_0^r e^{-\mu\sigma}\|f(t-\varepsilon\sigma)-f(t)\|d\sigma + 2e^{-\mu r}M\|f\|_\infty\mu^{-1}
\end{aligned}$$

这里 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\geqslant 0}\|f(t)\|$ 和 $r>0$，给定 $\rho>0$，我们首先选取 r 充分大使得右端第二项小于 $\rho/2$。然后由 f 的连续性选取 ε 充分小，使得右端第一项小于 $\rho/2$。于是当 $\varepsilon\to 0$ 时，$v_{\varepsilon 1}(t) \to 0$。最后

$$\begin{aligned}
v_{\varepsilon 2}(t) &= \varepsilon^{-1}\int_0^t T_\varepsilon(t-s)f(t)ds = \varepsilon^{-1}\int_0^t T_\varepsilon(t)f(t)d\tau \\
&= \varepsilon^{-1}\int_0^\infty T_\varepsilon(\tau)f(t)d\tau - d\tau - \varepsilon^{-1}\int_t^\infty T_\varepsilon(\tau)f(t)d\tau \\
&= -A^{-1}f(t) + T_\varepsilon(t)A^{-1}f(t).
\end{aligned}$$

因此，让 $\varepsilon\to 0$，我们有 $v_{\varepsilon 2}(t) \to -A^{-1}f(t)$ 在 $[\delta, T]$ 上是一

致的。

注。 在定理 4.5 中如果 $x\in D(A)$ 和 f 在 $[0,\infty)$ 上是连续可微的，则不难证明

$$\frac{du_\varepsilon(t)}{dt}\longrightarrow -A^{-1}f'(t),\text{ 当 }\varepsilon\to 0\text{ 时，}\qquad(4.18)$$

并且极限在 $(0,\infty]$ 的紧子集上是一致的。

§4.5 不变及容许子空间

设 X 是一个 Banach 空间，Y 是 X 的一个子空间（不必是闭的）。又设 S：$D(S)\subset X\to X$ 是 X 中的一个线性算子。称 X 的子空间 Y 是 S 的不变子空间，如果 S：$D(S)\cap Y\to Y$。

给定一个 X 上的 C_0 半群 $T(t)$，我们感兴趣的是 X 的一个子空间 Y 对所有 $t\geqslant 0$ 是 $T(t)$ 的不变子空间的条件，这样的子空间将称为半群 $T(t)$ 的一个不变子空间。如果 Y 是 X 的一个闭子空间，我们有

定理5.1 设 $T(t)$ 是 X 上的一个 C_0 半群，其无穷小生成元为 A。如果 Y 是 X 的一个闭子空间，则 Y 是 $T(t)$ 的不变子空间当且仅当存在一个实数 ω 使得对每一 $\lambda>\omega$，Y 是 A 的预解式 $R(\lambda;A)$ 的一个不变子空间。

证明 由第一章的结果，存在一个 ω 使得

$$R(\lambda;A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\qquad(5.1)$$

对于 $\lambda>\omega$ 成立。因此 $\lambda R(\lambda;A)x$ 在轨道 $\{T(t):t\geqslant 0\}$ 的闭凸包中，如果对每一 $t\geqslant 0$，$T(t)Y\subset Y$。则由 (5.1) 对每一 $\lambda>\omega$，$\lambda R(\lambda;A)Y\subset Y$。

反之，由指数公式（定理 1.8.3）我们有

$$T(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right)^n x,\ \text{对于}\ x\in X\ \text{成立。} \tag{5.2}$$

如果 $R(\lambda;A)Y\subset Y$ 对于 $\lambda>\omega$ 成立，则对所有充分大的 n，

$\left(\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right)^n Y\subset Y$，并且 (5.2) 推出对每一 $t>0$，$T(t)Y\subset Y$。

注 由定理 5.1 的证明，显然若 Y 是一个顶点在零的闭凸锥，而不是 X 的一个闭子空间，则结论仍成立。

以后我们对 Y 是 X 中非闭的不变子空间感兴趣。为了叙述这种结果我们需要一些准备。让我们首先回忆一下（见定义 1.10.3），如果 $S:D(S)\subset X\to X$ 和 Y 是 X 的一个子空间，则 S 在 Y 中的部分是这样一个线性算子 $\widetilde{S}$ 其定义域 $D(\widetilde{S})=\{x\in D(D)\cap Y;Sx\in Y\}$ 和对 $x\in D(\widetilde{S})$，$\widetilde{S}x=Sx$。S 对 Y 的限制 $S_{|Y}$ 显然满足 $S_{|Y}\supset\widetilde{S}$。如果 Y 是 S 的一个不变子空间，则 $S_{|Y}=\widetilde{S}$。

引理5.2 设 $S:D(S)\subset X\to X$ 是可逆的，Y 是 X 的一个子空间。如果 $S^{-1}Y\subset Y$，则 S 在 Y 中的部分 $\widetilde{S}$ 是可逆的和 $\widetilde{S}^{-1}=(S^{-1})_{|Y}$。

证明 设 $x\in Y$ 和 $z=S^{-1}x$，则 $z\in D(S)\cap Y$ 和 $Sz=x\in Y$

因此 $z\in D(\widetilde{S})$ 和 $\widetilde{S}z=Sz=x$，这表明 $\widetilde{S}$ 的值域是整个 Y 和 $\widetilde{S}^{-1}$ 是有定义的，且 $\widetilde{S}x=S^{-1}x$，对所有 $y\in Y$ 成立，即 $\widetilde{S}^{-1}=(S^{-1})_Y$。

在本节的其余部分我们将假设 X 是一个 Banach 空间，Y 是 X 的一个子空间，且关于范数 $\|\cdot\|_Y$ 是闭的（因此它本身是一个 Banach 空间）。我们将进一步假设范数 $\|\cdot\|_Y$ 强于 X 的原来的范数 $\|\cdot\|$，这意味着存在常数 C 使得

$$\|y\|\leqslant C\|y\|_Y,\quad 对于\ y\in Y\ 成立。\tag{5.3}$$

注意由假设，Y 关于范数 $\|\cdot\|_Y$ 是闭的，但在一般情况下它关于范数 $\|\cdot\|_Y$ 不是闭的。

定义5.3 设 $T(t)$ 是一个 C_0 半群，A 是其无穷小生成元，X 的一个子空间 Y 称为 A-容许的，如果它是 $T(t)$ 对于 $t\geqslant 0$ 的不变子空间和 $T(t)$ 在 Y 上的限制是 Y 中的一个 C_0 半群（即它关于范数 $\|\cdot\|_Y$ 是强连续的）。

例5.4 设 X 是 $[0,\infty)$ 上有界的一致连续的实值函数空间，具有通常的上确界范数。又设 $Y'=X\cap C^1([0,\infty))$，命

$$T(t)f(x)=f(x+t),\quad 对于\ f\in X,\ t\geqslant 0。\tag{5.4}$$

显然 $T(t)$ 是 X 上一个 C_0 收缩半群，其无穷小生成元 A 定义为 $D(A)=\{f\in Y':f'\in X\}$ 和对于 $f\in D(A)$，$Af=f'$。以 $\|\cdot\|$ 表示 X 中的范数，我们考虑使得 $g'\in X$ 的元素 $g\in Y'$ 的空间 Y，我们在 Y 上赋以范数 $\|g\|_Y=\|g\|+\|g'\|$，对于 $g\in Y$。范数 $\|\cdot\|_Y$ 是强于范数 $\|\ \ \|$ 的，并且 Y 在范数 $\|\cdot\|_Y$ 下是闭的。容易看出由 (5.4) 定义的半群 $T(t)$ 保持 Y 不变，并且是 Y 中的一个 C_0 半群。因此 Y 是 A-容许的。

定理5.5 设 $T(t)$ 是 X 上的一个 C_0 半群，A 是其无穷小生成元。

X 的一个子空间 Y 是 A-容许的当且仅当

(i) Y 对所有 $\lambda>\omega$ 是 $R(\lambda;A)$ 的不变子空间。

(ii) A 在 Y 中的部分 $\tilde{A}$ 是 Y 上的一个 C_0 半群的无穷小生成元。

此外，如果 Y 是 A-容许的，则 $\tilde{A}$ 是 $T(t)$ 在 Y 上的限制的无穷小生成元。

证明 假设 Y 是 A-容许的，因为 $T(t)Y\subset Y$ 对于 $t\geqslant 0$ 成立和 $\|\cdot\|_Y$ 强于 $\|\cdot\|$，$T(t)$ 在 Y 上的限制是 Y 中的一个 C_0 半群，所以由(5.1)存在 ω 使得对于 $\lambda>\omega$，$R(\lambda;A)Y\subset Y$。设 A_1 是 $T(t)$ 在 Y 上的限制的无穷小生成元，由无穷小生成元的定义即知 $D(A_1)\subset D(A)\cap Y$ 和对 $x\in D(A_1)$，$A_1x=Ax$ 因此 $\tilde{A}\supset A_1$。另一方面如果 $x\in D(\tilde{A})$，则 $Ax\in Y$ 和恒等式

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)Axds \tag{5.5}$$

在 Y 中成立。用 $t>0$ 除以 (5.5) 并让 $t\downarrow 0$ 得 $x\in D(A_1)$，从而 $D(A_1)\supset D(\tilde{A})$。于是 $\tilde{A}=A_1$，并且 $\tilde{A}$ 是 Y 上的一个 C_0 半群，即 $T(t)$ 在 Y 上的限制，的无穷小生成元。

反之假设 (i) 和 (ii) 成立，用 $S(t)$ 表示由 $\tilde{A}$ 在 Y 上生成的 C_0 半群。由假设 (i) 和引理 5.2，对每一 $x\in Y$，$R(\lambda;\tilde{A})x=R(\lambda;A)x$。因此

$$\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};\ \tilde{A}\right)\right]^n x=\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right]^n x \tag{5.6}$$

对所有充分大的 n 和 $x\in Y$ 成立。通过让 $n\to\infty$ 取极限，由指数公式（定理 1.8.3）知 (5.6) 的左边在 Y 中收敛，因此亦在 X 中收敛于 $S(t)x$，而右边在 X 中收敛到 $T(t)x$，因此 $S(t)x=T(t)x$ 对每一 $x\in Y$ 成立。由此推出 Y 是 $T(t)$ 的一个不变子空间和 $T(t)$ 是 Y 上的一个 C_0 半群。

推论5.6 Y 是 A- 容许的当且仅当

(i) 对于充分大的 λ，Y 是 $R(\lambda;A)$ 的一个不变子空间。

(ii) 存在常数 M 和 β 使得

$$\|R(\lambda;A)^n\|_Y\leqslant M(\lambda-\beta)^{-n},$$
$$\text{对于 } \lambda>\beta,\ n=1,2,\cdots \text{ 成立。} \tag{5.7}$$

(iii) 对于 $\lambda>\beta$，$R(\lambda;A)Y$ 在 Y 中稠密。

证明 条件 (i) 和定理 5.5 中的相同，由 (i) 和引理 5.2 知 $R(\lambda;\tilde{A})x=R(\lambda;A)x$ 对于 $x\in Y$ 和 $\lambda>\omega$ 成立。因此我们能在 (5.7) 和条件 (ii) 中用 $\tilde{A}$ 代替 A。于是条件 (iii) 等价于 $D(\tilde{A})=R(\lambda;\tilde{A})Y=R(\lambda;A)Y$ 在 Y 中稠密。又由定理 1.5.3 $\tilde{A}$ 在 Y 中生成一个 C_0 半群当且仅当 (i) 和 (ii) 成立。于是由定理 5.5，Y 是 A- 容许的当且仅当 (i)—(iii) 成立。

注5.7 如果在推论 5.6 中 Y 是自反的，则条件 (iii) 由 (i) 和 (ii) 推出。事实上，对于 $\lambda,\ \mu\in\rho(A)$ 我们有预解恒等式

$$R(\lambda;A)-R(\mu;A)=(\mu-\lambda)R(\lambda;A)R(\mu;A),$$

由此直接推出 $D=R(\lambda;A)Y$ 是不依赖于 $\lambda\in\rho(A)$的。由(5.7)取 $n=1$ 知对于 $x\in Y$，当 $\lambda\to\infty$ 时，$\lambda R(\lambda;A)x$ 在 Y 中是有

界的，于是 Y 的自反性推出存在序列 $\lambda_n\to\infty$ 使得 $\lambda_n R(\lambda_n;A)x$ 在 Y 中弱收敛于某一 $y\in Y$。因为 A 是 X 上一个 C_0 半群的无穷小生成元，所以当 $\lambda\to\infty$ 时，$\lambda R(\lambda;A)x\to x$ 在 X 中强收敛（引理 1.3.2）。因此 $y=x$。因为对充分大的值 λ_n，$\lambda_n R(\lambda_n;A)x\in D$，所以我们推出 D 在 Y 中的弱闭包是整个 Y。但 **Banach** 空间的一个线性子空间的弱和强闭包是相同的，因而 D 在 Y 中稠密。我们用一个判断子空间 Y 是 A- 容许的有用准则来结束本节。

定理5.8 设 $\overline{Y}$ 是 Y 依 X 的范数的闭包。设 S 是 Y 到 $\overline{Y}$ 上的一个同构，则 Y 是 A- 容许的当且仅当 $A_1=SAS^{-1}$ 是一个 $\overline{Y}$ 上 C_0 半群的无穷小生成元。在这种情况我们在 $\overline{Y}$ 中有

$$T_1(t)=ST(t)S^{-1},$$

这里 $T_1(t)$ 是由 A_1 生成的半群。

证明 设 $\widetilde{A}$ 是 A 在 Y 中的部分，由 A_1 的定义我们有

$$D(A_1)=\{x\in\overline{Y}:S^{-1}x\in D(A),\ AS^{-1}x\in Y\}$$

$$=\{x\in\overline{Y}:S^{-1}x\in D(\widetilde{A})\}=SD(\widetilde{A}).$$

这就推出 $D(A_1)$ 在 $\overline{Y}$ 中稠密当且仅当 $D(\widetilde{A})$ 在 Y 中稠密。此外，对于 $x\in D(A_1)$ 我们有

$$(\lambda I-A_1)x=(\lambda I-SAS^{-1})x=S(\lambda I-A)S^{-1}x$$

$$=S(\lambda I-\widetilde{A})S^{-1}x. \tag{5.8}$$

由假设知对 $\lambda>\omega$，$R(\lambda;A)$ 在 X 上是有界的。我们指出 $R(\lambda;A_1)$ 存在且是 $\overline{Y}$ 上一个有界算子当且仅当 $R(\lambda;A)Y\subset Y$。从而在

$\overline{Y}$ 中

$$R(\lambda;A_1)=SR(\lambda;A)S^{-1}=SR(\lambda;\widetilde{A})S^{-1}. \qquad (5.9)$$

事实上，如果 $R(\lambda;A)Y\subset Y$，则 $SR(\lambda;A)S^{-1}$ 是 $\overline{Y}$ 上一个有界线性算子，且为 $S(\lambda I-A)S^{-1}$ 的逆，于是由(5.8)即得(5.9)。另一方面如果 $R(\lambda;A_1)$ 在 Y 中存在，则 $S(\lambda I-A)S^{-1}$ 是可逆的，且其逆 $SR(\lambda;A)S^{-1}$ 是一个满足 (5.9) 的有界线性算子。因此 $SR(\lambda;A_1)=R(\lambda;A)S^{-1}$。由此推出 $R(\lambda;A)Y\subset Y$。

现在如果 A_1 是 Y 上的一个 C_0 半群的无穷小生成元，则 $D(A_1)$ 在 $\overline{Y}$ 中稠密，因此 $D(\widetilde{A})$ 在 Y 中稠密。此外，对 $\lambda>\omega$，$R(\lambda;A_1)$ 存在。因此由证明的前一部分，$R(\lambda;A)Y\subset Y$ 和 (5.9) 成立。于是定理 1.5.3 推出 $\widetilde{A}$ 在 Y 上生成一个 C_0 半群和由定理 5.5，Y 是 A-容许的，另一方面，如果 Y 是 A-容许的，则 $R(\lambda;A)Y\subset Y$（定理 5.5），并由证明的前一部分，(5.9) 成立。因为 $D(\widetilde{A})$ 在 Y 中稠密，所以 $D(A_1)$ 在 Y 中稠密且定理 1.5.3 推出 A_1 是 $\overline{Y}$ 上的一个 C_0 半群的无穷小生成元。最后，(5.9) 连同指数公式（定理 1.8.3）一起推出 $T_1(t)=ST(t)S^{-1}$。证毕。

第五章　发展方程

§5.1 发展系统

设X是 **Banach** 空间，对每一 t，$0\leqslant t\leqslant T$ 设 $A(t)$：$D(A(t))\subset X\Rightarrow X$ 是X中一个线性算子，又设 $f(t)$ 是一个X值函数。在这一章，我们将研究初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=A(t)u(t)+f(t), & s<t\leqslant T,\\ u(s)=x.\end{cases}\tag{1.1}$$

初值问题(1.1)称为一个发展问题．一个X值函数 u：$[s,T]\to X$ 称为(1.1)的一个古典解，如果 u 在 $[s,T]$ 上连续，对于 $s<t\leqslant T$，$u(t)\in D(A(t))$，u 在 $s<t\leqslant T$ 上连续可微和满足 (1.1) 。

前一章致力于研究(1.1)当 $A(t)=A$ 不依赖于 t 时的特殊情况。我们看到在这种情形下，非齐次初值问题，即对于 $f\neq 0$ 的问题的解能用齐次初值问题的解通过"常数变异"公式

$$u(t)=T(t-s)u(s)+\int_s^t T(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{1.2}$$

表示，其中 $T(t)x$ 是初值问题

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t),\quad u(0) = x \tag{1.3}$$

的解。后面我们将看到当 $A(t)$ 依赖于 t 时一个类似的结果亦成立，因此我们开始集中讨论齐次初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \\ u(s) = x. \end{cases} \tag{1.4}$$

为了对(1.4)的解的性态获得一些印象我们首先考虑对于 $0 \leqslant t \leqslant T$，$A(t)$ 是 X 上的有界线性算子和 $t \to A(t)$ 是依一致算子拓扑连续的简单情况。对于这种情况我们有

定理 1.1 设 X 是 **Banach** 空间和对于每一 $t \in [0, T]$，$A(t)$ 是 X 上的有界线性算子，如果函数 $t \to A(t)$ 是依一致算子拓扑连续的，则对每一 $x \in X$，初值问题(1.4)有唯一的古典解 u。

证明 定理的证明是用标准的 **Picard** 迭代方法。记 $a = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|A(t)\|$ 和定义一个映 $C([s, T]; X)$ 到自身的映象 S 如下

$$(Su)(t) = x + \int_s^t A(\tau)u(\tau)d\tau \tag{1.5}$$

记 $\|u\|_\infty = \max\limits_{s \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|$，那么容易验证

$$\|Su(t) - Sv(t)\| \leqslant a(t-s)\|u-v\|_\infty, \text{对于 } s \leqslant t \leqslant T \text{ 成立} \tag{1.6}$$

利用(1.5)和(1.6)，由归纳法推出

$$\|S^n u(t) - S^n v(t)\| \leqslant \frac{a^n(t-s)^n}{n!}\|u-v\|_\infty, \text{对于 } s \leqslant t \leqslant T \text{ 成立，}$$

因此

$$\|S^n u - S^n v\|_\infty \leqslant \frac{\alpha^n (t-s)^n}{n!} \|u-v\|_\infty .$$

对于充分大的 n 有 $\frac{\alpha^n (T-s)^n}{n!} < 1$，由 **Banach** 压缩原理的一个熟知的推广，S 在 $C([s,T]; X)$ 中有唯一的不动点 u 使得

$$u(t) = x + \int_s^t A(\tau) u(\tau) d\tau \tag{1.7}$$

因为 u 是连续的，所以(1.7)的右端是可微的。因此 u 是可微的且通过微分(1.7)得到的导数满足 $u'(t) = A(t)u(t)$。从而 u 是初值问题(1.4)的一个解。因为(1.4)的每一个解亦是(1.7)的一个解，所以(1.4)的解是唯一的。

我们定义初值问题(1.4)的“解算子”如下

$$U(t,s)x = u(t) \quad \text{对于 } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{1.8}$$

这里 u 是(1.4)的解，$U(t,s)$ 是一个双参数的算子族，由初值问题(1.4)的解的唯一性即知如果 $A(t) = A$ 不依赖于 t，则 $U(t,s) = U(t-s)$，并且双参数的算子族化为单参数族 $U(t)$，$t \geqslant 0$，这自然是由A 生成的半群。在我们的特殊情形，即对于 $t \in [0,T]$，$A(t)$ 是 X 上的一个有界线性算子和 $t \to A(t)$ 是依一致算子拓扑连续的，$U(t,s)$ 的主要性质由下一个定理给出。

定理 1.2 对每一 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$，$U(t,s)$ 是一个有界线性算子和

(i) $\|U(t,s)\| \leqslant \exp\left(\int_s^t \|A(\tau)\| d\tau\right)$.

(ii) $U(t,t)=I$, $U(t,s)=U(t,r)U(r,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant T$ 成立。

(iii) 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, $(t,s)\to U(t,s)$ 是依一致算子拓扑连续的。

(iv) $\dfrac{\partial U(t,s)}{\partial t}=A(t)U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立。

(v) $\dfrac{\partial U(t,s)}{\partial s}=-U(t,s)A(s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立。

证明 因为问题(1.4)是线性的，显然 $U(t,s)$ 是定义在整个 X 上的线性算子，由 (1.7) 得

$$\|u(t)\|\leqslant\|x\|+\int_s^t\|A(\tau)\|\cdot\|u(\tau)\|d\tau.$$

由 Gronwall 不等式导出

$$\|U(t,s)x\|=\|u(t)\|\leqslant\|x\|\exp\left(\int_s^t\|A(\tau)\|d\tau\right), \tag{1.9}$$

因此 $U(t,s)$ 是有界的和满足(i)。

由(1.8)即得 $U(t,t)=I$。由(1.4)的解的唯一性得到关系式 $U(t,s)=U(t,r)U(r,s)$，对于 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant T$ 成立，综合(i)和(ii)得(iii)。最后由(1.7)和(iii)得 $U(t,s)$ 是积分方程

$$U(t,s)=I+\int_s^t A(\tau)U(\tau,s)d\tau \tag{1.10}$$

在 $B(X)$ (X 上所有有界线性算子的空间）中的唯一解。对t微分(1.10)得(iv)。对 s 微分(1.10)我们得到

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)=-A(s)+\int_s^t A(\tau)\frac{\partial}{\partial s}U(\tau,s)d\tau \tag{1.11}$$

由（1.10）的解的唯一性知

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s) = -U(t,s)A(s). \tag{1.12}$$

证毕。

在 $A(t)$ 依赖于 t 的非自治情况双参数算子族 $U(t,s)$ 代替了自治情况下的单参数半群 $U(t)$。这促使我们给出以下定义。

定义 1.3 一个 X 上的有界线性算子的双参数族 $U(t,s)$，$0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ 称为一个发展系统，如果以下两个条件成立：

(i) $U(s,s)=I$，$U(t,r)U(r,s)=U(t,s)$，对于 $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t \leqslant T$ 成立。

(ii) $(t,s) \to U(t,s)$ 对于 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ 是强连续的。

请注意，同自治情况类似，我们对于解的一致连续性没有兴趣，因此用强连续性代替 $U(t,s)$ 依一致算子拓扑的连续性。

在下一节，我们对给定在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上的通常是无界的线性算子族 $\{A(t)\}$，给出保证初值问题

$$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), \quad u(s)x \tag{1.13}$$

对于初值 $x \in X$ 的一个稠子集存在唯一的古典解的条件，这种唯一解的存在性将为我们提供对应于算子族 $\{A(t)\}$，$0 \leqslant t \leqslant T$ 的一个发展系统。(1.13)的解的唯一性将推出发展系统的性质(i)，而解在初始时刻的连续性将推出性质(ii)。$A(t)$ 和 $U(t,s)$ 之间的关系将由一些推广的方程

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} = A(t)U(t,s), \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial s} = -U(t,s)A(s). \tag{1.15}$$

确定。

我们用一个关于非齐次初值问题(1.1)的注记来结束本节，其中，$f \in L^1(0,T:X)$。如果存在相应于这个初值问题的发展系统 $U(t,s)$ 使得对每一 $v \in D(A(s))$，$U(t,s)v \in D(A(t))$ 和 $U(t,s)v$ 关于 t 和 s 均可微，并满足

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)v = A(t)U(t,s)v, \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)v = -U(t,s)A(s)v. \tag{1.17}$$

则对于 $x \in D(A(s))$ 方程(1.1)的每一古典解是由

$$u(t) = U(t,s)x + \int_s^t U(t,r)f(r)dr \tag{1.18}$$

给出，事实上，在这种情况函数 $r \to U(t,r)u(r)$ 在 $[s,T]$ 上是可微的和

$$\frac{\partial}{\partial r}U(t,r)u(r) = -U(t,r)A(r)u(r) + U(t,r)A(r)u(r)$$

$$+U(t,r)f(r) = U(t,r)f(r). \tag{1.19}$$

从 s 到 t 积分(1.19)得(1.18)。因此在这种情形非齐次初值问题(1.1)至多有一个古典解 u。如果它存在，则由(1.18)给出。然而对任何发展系统 $U(t,s)$ 和 $f \in L^1(0,T:X)$，

(1.18)的右端是一个满足 $u(s)=x$ 的连续函数。如同自治情形（4.5.2节）一样，我们常常把这个函数作为初值问题(1.1)的一个广义解。

§5.2 稳定的生成元族

本节作一些准备工作。这在构造“双曲”型初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=A(t)u(t), & 0\leqslant s\leqslant t,\\ u(s)=x\end{cases}\tag{2.1}$$

的发展系统时是需要的。

定义 2.1 设 X 是一个 Banach 空间。一个 X 上的 C_0 半群的无穷小生成元族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 称为是稳定的，如果存在常数 $M\geqslant 1$ 和 ω（称为稳定常数）使得

$$\rho(A(t))\supset(\omega,\infty)\ \text{对于}\ t\in[0,T]\ \text{成立}\tag{2.2}$$

和

$$\left\|\prod_{j=1}^{k}R(\lambda;A(t_j))\right\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-k}\tag{2.3}$$

对于 $\lambda>\omega$ 和每一有限序列 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant T$，$k=1,2,\cdots$成立。

请注意，在一般情况下算子 $R(\lambda;A(t_j))$ 不是可换的，因此在(2.3)中项的次序是重要的。在(2.3)和在后面的包含 $\{t_j\}$ 的乘积中将总是“时序的”，即具有较大 t_j 的因子位于具有较小 t_j 的因子的左边。

由稳定性的定义当 X 的范数由一个等价范数代替时一族无穷小生成元 $\{A(t)\}$ 的稳定性保持不变，然而稳定常数依赖于 X 中特殊范数的选取。

如果对 $t\in[0,T]$，$A(t)\in G(1,\omega)$，即 $A(t)$ 是一个满足 $\|S_t(s)\|\leqslant e^{\omega s}$ 的 C_0 半群 $S_t(s)$，$s\geqslant 0$ 的无穷小生成元，那么 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 显然是具稳定常数 $M=1$ 和 ω 的稳定族。特别地，C_0 收缩半群的无穷小生成元族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是稳定的。

定理 2.2 对于 $t\in[0,T]$，设 $A(t)$ 是 Banach 空间 X 上的一个 C_0 半群 $S_t(s)$ 的无穷小生成元。则生成元族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是稳定的当且仅当存在常数 $M\geqslant 1$ 和 ω 使得 $\rho(A(t))\supset(\omega,\infty)$ 对于 $t\in[0,T]$ 成立和以下条件之一成立：

$$\left\|\prod_{j=1}^{k} S_{t_j}(s_j)\right\|\leqslant M\exp\left\{\omega\sum_{j=1}^{k} s_j\right\} \tag{2.4}$$

对于 $s_j\geqslant 0$ 和任何有限序列 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant T$，$k=1,2,\cdots$ 成立或者

$$\left\|\prod_{j=1}^{k} R(\lambda_j;A(t_j))\right\|\leqslant M\prod_{j=1}^{k}(\lambda_j-\omega)^{-1} \tag{2.5}$$

对于 $\lambda_j>\omega$ 和任何有限序列 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant T$，$k=1,2,\cdots$ 成立。

证明 显然，由定理的陈述，对于满足 $\rho(A(t))\supset(\omega,\infty)$ 的无穷小生成元族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$，证明估计(2.3)，(2.4)和(2.5)等价就充分了。

假设(2.3)成立，设 s_j，$1\leqslant j\leqslant k$ 是正有理数，命 $\lambda=N$ 是正整数使得 $Ns_j=m_j$ 对于 $1\leqslant j\leqslant k$ 是一个正整数。在(2.3)

中我们取 $m=\sum_{j=1}^{k} m_j$ 项并将它们分成包含 m_j，$1\leqslant j\leqslant k$ 项的 k 个子集。在第 j 个子集中 t 的值被取作等于 t_j。在用 N^m 除以不等式两边我们得到

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} \left[\frac{m_j}{s_j} R\left(\frac{m_j}{s_j}; A(t_j)\right)\right]^{m_j} \right\| \leqslant M\left(1-\frac{\omega}{N}\right)^{-m} \tag{2.6}$$

让 $N\to\infty$ 使得 Ns_j 对于 $1\leqslant j\leqslant k$ 保持取整数值和每一 m_j 趋于无穷大，并由指数公式（定理1.8.3）我们得到

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} S_{t_j}(s_j) \right\| \leqslant M \exp\left\{ \omega \sum_{i=1}^{k} s_i \right\},$$

因此(2.4)对所有正有理数 s_j 成立。对于非负实数 s_j 的一般情形由 $S_t(s)$ 在 s 的强连续得到，因此(2.3)推出(2.4)。

在第一章我们已经看到

$$R(\lambda_j;A(t_j))x=\int_0^\infty e^{-\lambda_j s} S_{t_j}(s)x ds,$$

对于 $\lambda_j>\omega$ 成立。 (2.7)

重复 (2.7) 有限次得

$$\prod_{j=1}^{k} R(\lambda_j;A(t_j))x=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j s_j\right\}$$

$$\prod_{j=1}^{k} S_{t_j}(s_j)ds_1\cdots ds_k. \tag{2.8}$$

利用(2.4)估计(2.8)右端的范数我们看到

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda_j; A(t_j)) \right\| \leqslant M \|x\| \prod_{j=1}^{k} \int_0^\infty e^{(\omega-\lambda_j)s_j} ds_j$$

$$= M\|x\| \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - \omega)^{-1}.$$

因此(2.4)推出(2.5)。最后在(2.5)中选取所有 λ_j 等于 λ 知(2.5)蕴涵(2.3)。证毕。

在上面我们已经注意到如果 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一族满足 $A(t)\in G(1,\omega)$，$t\in[0,T]$ 的无穷小生成元，则它是一个稳定族。然而在一般情况下确定一族已给的无穷小生成元是否是稳定的并非总是容易的，对此以下扰动定理是一个有用的准则。

定理 2.3 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个无穷小生成元的稳定族，具有稳定常数 M 和 ω。设 $B(t)$，$0\leqslant t\leqslant T$ 是 X 上的有界线性算子，如果对所有 $0\leqslant t\leqslant T$，$\|B(t)\|\leqslant K$，则 $\{A(t)+B(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个无穷小生成元的稳定族，具有稳定常数 M 和 $\omega+KM$。

证明 由定理3.1.1对每一 $t\in[0,T]$，$A(t)+B(t)$ 是一个 C_0 半群的无穷小生成元，容易验证如果 $\lambda>\omega+KM$，则 λ 是在 $A(t)+B(t)$ 的预解集中和

$$R(\lambda;A(t)+B(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda;A(t))[B(t)R(\lambda;A(t))]^n.$$

因此

$$\prod_{j=1}^{k} R(\lambda;A(t_j)+B(t_j))$$

$$=\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{n=0}^{\infty}R(\lambda;A(t_j))[B(t_j)R(\lambda;A(t_j))]^n\right). \quad (2.9)$$

展开(2.9)的右端我们得到一个级数，其一般项具有形式

$$R(\lambda;A(t_k))[B(t_k)R(\lambda;A(t_k))]^{n_k}$$

$$\cdots R(\lambda;A(t_1))[B(t_1)R(\lambda;A(t_1))]^{n_1}$$

这里 $n_j\geqslant 0$。如果 $\sum_{j=1}^{k} n_j=n$，并利用族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的稳定性估计该项，则得到估计 $M^{n+1}K^n(\lambda-\omega)^{-n-k}$。在这个级数中对于 $\sum_{j=1}^{k} n_j=n$ 的项的项数是 $\binom{n}{k}$，因此

$$\left\|\prod_{j=1}^{k}R(\lambda;A(t_j)+B(t_j))\right\|$$

$$\leqslant M(\lambda-\omega)^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}(MK(\lambda-\omega)^{-1})^n$$

$$=M(\lambda-\omega-MK)^{-1}.$$

证毕。

设 X 和 Y 是 Banach 空间，并设 Y 是稠的和连续地嵌入到 X 内。设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 X 中的一个无穷小生成元的稳定族。又设 $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 $A(t)$ 在 Y 中的部分的族。我们的最后一个结果给出了 $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 Y 中稳定族的一个有用的充分条件。

定理 2.4 设 $Q(t)$，$0\leqslant t\leqslant T$ 是一族 Y 到 X 上的同构，具有以下性质：

(i) $\|Q(t)\|_{Y\to X}$ 和 $\|Q(t)^{-1}\|_{X\to Y}$ 是一致有界的，其控制常数为 C。

(ii) 映象 $t\to Q(t)$ 在具范数 $\|\cdot\|_{Y\to X}$ 的空间 $B(Y,X)$ 中是有界变差的。

设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 X 中一个无穷小生成元的稳定族。又设 $A_1(t)=Q(t)A(t)Q(t)^{-1}$，如果 $\{A_1(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 X 中一个无穷小生成元的稳定族，则对于 $t\in[0,T]$，Y 是 $A(t)$-容许的和 $\{\widetilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 Y 中一个无穷小生成元的稳定族。

证明 由定理4.5.8即知对每一 $t\in[0,T]$，Y 是 $A(t)$-容许的。因此由定理4.5.5，$A(t)$ 在 Y 中的部分 $\widetilde{A}(t)$ 是 Y 中一个 C_0 半群的无穷小生成元。由 $A_1(t)$ 的定义得到

$$D(A_1(t))=\{x\in X;\ Q(t)^{-1}x\in D(A(t)),A(t)Q(t)^{-1}x\in Y\}$$

$$=\{x\in X;\ Q(t)^{-1}x\in D(\widetilde{A}(t))\}=Q(t)D(\widetilde{A}(t))$$

因此 $A_1(t)=Q(t)\widetilde{A}(t)Q(t)^{-1}$。这就推出对充分大的实数 λ

$$R(\lambda;\widetilde{A}(t))=Q(t)^{-1}R(\lambda;A_1(t))Q(t),$$

于是

$$\prod_{j=1}^{k}R(\lambda;\widetilde{A}(t_j))=\prod_{j=1}^{k}Q(t_j)^{-1}R(\lambda;A_1(t))Q(t_j). \qquad (2.10)$$

命 $P_j=(Q(t_j)-Q(t_{j-1}))Q(t_{j-1})^{-1}$，(2.10)的右端成为

$$Q(t_k)^{-1}\{R(\lambda;A_1(t_k))(I+P_k)\cdots(I+P_1)R(\lambda;A_1(t_1))\}Q(t_1). \qquad (2.11)$$

设 M_1 和 ω_1 是 $\{A_1(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的稳定常数。展开花括号中的式子成 P_j 的多项式，并注意类似于定理2.3的证明，包含 m 个 P_j 的项在估计范数时仅出现 M_1 的 $(m+1)$ 个因子，因此我们可以得到该式在 X 中的范数估计为

$$M_1(\lambda-\omega_1)^{-k}\prod_{j=2}^{k}(1+M_1\|P_j\|). \tag{2.12}$$

由P_j的定义我们有 $\|P_j\|\leqslant C\|Q(t_j)-Q(t_{j-1})\|_{Y\to X}$。因此

$$(1+\alpha\|P_j\|)\leqslant \exp\{\alpha C\|Q(t_j)-Q(t_{j-1})\|_{Y\to X}\}. \tag{2.13}$$

用 V 表示 $t\to Q(t)$ 依 $B(Y,X)$ 中的范数得到的全变差，并利用(2.12)和(2.13)依 Y 的范数估计(2.11)得

$$\left\|\prod_{j=1}^{k}R(\lambda;\widetilde{A}(t_j))\right\|_Y\leqslant C^2M_1(\lambda-\omega_1)^{-k}$$

$$\cdot\exp\left\{M_1C\sum_{j=2}^{k}\|Q(t_j)-Q(t_{j-1})\|_{Y\to X}\right\}$$

$$\leqslant C^2M_1e^{CM_1V}(\lambda-\omega_1)^{-k}$$

因此 $\{\widetilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 Y 中的稳定族。

§5.3 一个双曲型发展系统

本节讨论以下初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=A(t)u(t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\\ u(s)=v,\end{cases} \tag{3.1}$$

的发展系统的构造，这里算子族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足以下条件 (H_1)—(H_3)。同“抛物”型的情形，即对于 $t\geqslant0$ 每个算子 $A(t)$ 被假设是一个解析半群的无穷小生成元，相对照，条件组 (H_1)—(H_3) 通常被称为是“双曲”型的。这些命名

的原因在于抽象结果对偏微分方程的不同应用。

设 X 和 Y 是分别具有范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 的 Banach 空间。整个这一节我们假设 Y 是稠的和连续地嵌入在 X 中，即 Y 是 X 的一个稠子空间和存在一个常数 C 使得

$$\|w\|\leqslant C\|w\|_Y \text{ 对于 } w\in Y \text{ 成立。} \tag{3.2}$$

设 A 是 X 上一个 C_0 半群 $S(s)$，$s\geqslant 0$ 的无穷小生成元。回忆一下（定义4.5.3），Y 是 A- 容许的，如果 Y 是 $S(s)$ 的一个不变子空间和 $S(t)$ 在 Y 上的限制 $\widetilde{S}(s)$ 是 Y 上的一个 C_0 半群。此外，在这种情形 A 在 Y 中的部分 $\widetilde{A}$ 是 Y 上的半群 $\widetilde{S}(s)$ 的无穷小生成元。

对于 $t\in[0,T]$，设 $A(t)$ 是 X 上 C_0 半群 $S_t(s)$，$s\geqslant 0$ 的无穷小生成元，我们将作以下的假设

(H_1) $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个稳定族，其稳定常数为 M 和 ω。

(H_2) 对 $t\in[0,T]$，Y 是 $A(t)$- 容许的和 $A(t)$ 在 Y 中的部分 $\widetilde{A}(t)$ 的族 $\{\widetilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 在 Y 中是稳定的，其稳定常数为 $\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{\omega}$。

(H_3) 对 $t\in[0,T]$，$D(A(t))\supset Y$，$A(t)$ 是映 Y 到 X 内的一个有界算子和 $t\to A(t)$ 是依 $B(Y,X)$ 中的范数是连续的。

本节的基本结果定理3.1指出如果 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足条件 (H_1)—(H_3)，则和初值问题(3.1)相应的唯一的发展系统 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 存在。

定理 3.1 设 $A(t)$，$0\leqslant t\leqslant T$ 是 X 上 C_0 半群 $S_t(s)$ 的

无穷小生成元。如果算子族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足条件 (H_1)—(H_3)，则在 X 中对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 存在唯一的发展系统 $U(t,s)$ 满足

(E_1) $\|U(t,s)\|\leqslant M\exp\{\omega(t-s)\}$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立。

(E_2) $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)v\,|_{t=s}=A(s)v$ 对于 $v\in Y$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立。

(E_3) $\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)v=-U(t,s)A(s)v$ 对于 $v\in Y$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立。

这里 (E_2) 中的右导数和 (E_3) 中的导数是在 X 中的强的意义下的。

证明 首先我们用如下定义的分段常数族 $\{A_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ 来逼近族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$：设 $t_k^n=\frac{k}{n}T$, $k=0,1,\cdots,n$ 和

$$\begin{cases} A_n(t)=A(t_k^n) \text{ 对于 } t_k^n\leqslant t<t_{k+1}^n, \quad k=0,1,\cdots,n-1, \\ A_n(T)=A(T). \end{cases} \tag{3.3}$$

因为 $t\to A(t)$ 是依 $B(Y,X)$ 中的范数连续的，所以

$$\|A(t)-A_n(t)\|_{Y\to X}\to 0, \text{ 当 } n\to\infty \text{ 时}, \tag{3.4}$$

对 $t\in[0,T]$ 是一致的。由 $A_n(t)$ 的定义和定理的条件即知对 $n\geqslant 1$, $\{A_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 X 中具有常数 M, ω 的稳定族和 $\{\widetilde{A}_n(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 Y 中具有常数 $\widetilde{M}$, $\widetilde{\omega}$ 的稳定族。

其次对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 我们定义的双参数算子族 $U_n(t,s)$

如下：

$$U_n(t,s)=\begin{cases} S_{t_j^n}(t-s), & \text{对于 } t_j^n\leqslant s\leqslant t\leqslant t_{j+1}^n, \\ S_{t_k^n}(t-t_k^n)\left[\prod\limits_{j=l+1}^{k-1} S_{t_j^n}\left(\dfrac{T}{n}\right)\right] S_{t_l^n}(t_l^n-s), \end{cases}$$

$$\text{对于 } k>l,\ t_k^n\leqslant t\leqslant t_{k+1}^n,\ t_l^n\leqslant s\leqslant t_{l+1}^n. \tag{3.5}$$

容易验证 $U_n(t,s)$ 是一个发展系统，即

$$U_n(s,s)=I,\ U_n(t,s)=U_n(t,r)U_n(r,s),$$

$$\text{对于 } 0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant T \text{ 成立。} \tag{3.6}$$

和

$$(t,s)\to U_n(t,s) \text{ 在 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \text{ 上是强连续的。} \tag{3.7}$$

由定理2.2得

$$\|U_n(t,s)\|\leqslant M\,e^{\omega(t-s)},\ \text{对于 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \text{ 成立} \tag{3.8}$$

和由 (H_2) 我们有

$$U_n(t,s)Y\subset Y,\ \text{对于 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \text{ 成立。} \tag{3.9}$$

因为对于 $t\in[0,T]$，$D(A(t))\supset Y$，所以 $U_n(t,s)$的定义推出对于 $v\in Y$

$$\frac{\partial}{\partial t}U_n(t,s)v=A_n(t)U_n(t,s)v,$$

$$\text{对于 } t\neq t_j^n,\ j=0,1,\cdots,n, \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}U_n(t,s)v=-U_n(t,s)A_n(s)v,$$

$$\text{对于 } s\neq t^n,\ j=0,1,\cdots,n. \tag{3.11}$$

此外，(H_3) 连同定理2.2一起推出

$$\|U_n(t,s)\|_Y\leqslant \widetilde{M}\,e^{\bar{\omega}(t-s)},\ \text{对于 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \text{ 成立。} \tag{3.12}$$

设 $v\in Y$，并考虑映象 $r\to U_n(t,r)U_m(r,s)v$。由 (3.10) 和 (3.11)，除了 r 的有限个值外，这个映象对于 r，$s\leqslant r\leqslant t$ 是可微的和

$$U_n(t,s)v-U_m(t,s)v=-\int_s^t\frac{\partial}{\partial r}U_n(t,r)U_m(r,s)v\,dr$$

$$=\int_s^t U_n(t,r)(A_n(r)-A_m(r))U_m(r,s)v\,dr. \qquad (3.13)$$

记 $\gamma=\max(\omega,\tilde{\omega})$，(3.13)推出

$$\|U_n(t,s)v-U_m(t,s)v\|$$

$$\leqslant M\tilde{M}e^{\gamma(t-s)}\|v\|_Y\int_s^t\|A_n(r)-A_m(r)\|_{Y\to X}dr. \qquad (3.14)$$

由(3.13)和(3.14)，当 $n\to\infty$ 时，$U_n(t,s)v$ 在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上一致收敛。因为 Y 在 X 中稠密，所以 $U_n(t,s)v$ 的这种收敛性连同(3.8)一起推出当 $n\to\infty$ 时，$U_n(t,s)$ 在 X 中强收敛，并关于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是一致的。设

$$U(t,s)=\lim_{n\to\infty}U_n(t,s)x, \quad 对于\ x\in X,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T. \qquad (3.15)$$

由(3.6)和(3.7)，显然 $U(t,s)$ 是 X 中的一个发展系统和由(3.8)知 (E_1) 成立。

为了证明 (E_2) 和 (E_3) 对于 $v\in Y$ 考虑函数 $r\to U_n(t,r)S_\tau(r-s)v$。除了 r 的有限个值外这个函数是可微的，我们有

$$U_n(t,s)v-S_\tau(t-s)v=-\int_s^t\frac{\partial}{\partial r}U_n(t,r)S_\tau(r-s)v\,dr$$

$$=\int_s^t U_n(t,r)(A_n(r)-A(\tau))S_\tau(r-s)v\,dr. \tag{3.16}$$

因此

$$\|U_n(t,s)v-S_\tau(t-s)v\|$$
$$\leqslant M\widetilde{M}\,e^{\gamma(t-s)}\|v\|_Y\int_s^t\|A_n(r)-A(\tau)\|_{Y\to X}dr.$$

让 $n\to\infty$ 取极限得

$$\|U(t,s)v-S_\tau(t-s)v\|$$
$$\leqslant M\widetilde{M}\,e^{\gamma(t-s)}\|v\|_Y\int_s^t\|A_n(r)-A(\tau)\|_{Y\to X}dr. \tag{3.17}$$

在(3.17)中取 $\tau=s$，并除以 $t-s>0$ 和让 $t\downarrow s$ 我们得到

$$\limsup_{t\downarrow s}\frac{1}{t-s}\|U(t,s)v-S_s(t-s)v\|=0, \tag{3.18}$$

这里我们用了 $t\to A(t)$ 依 $B(Y,X)$ 中范数的连续性。因为 $S_s(t-s)v$ 在 $t=s$ 是右可微的，所以由 (3.18)，$U(t,s)v$ 在 $t=s$ 是右可微的，且它们在 $t=s$ 的右导数是相同的，这就推出 (E_2).

在(3.17)中取 $\tau=t$，并除以 $t-s>0$ 和让 $s\uparrow t$ 我们得到

$$\limsup_{s\uparrow t}\frac{1}{t-s}\|U(t,s)v-S_t(t-s)v\|=0. \tag{3.19}$$

如同上面一样，这就推出

$$\frac{\partial^-}{\partial s}U(t,s)v\Big|_{s=t}=-A(t)v \tag{3.20}$$

对于 $s<t$，(E_2) 连同 $U(t,s)$ 在 X 中的强连续性一起推出

$$\frac{\partial^+}{\partial s} U(t,s)v = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\{U(t,s+h)v - U(t,s)v\}$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} U(t,s+h) \left\{\frac{v - U(s+h,s)v}{h}\right\}$$

$$= -U(t,s)A(s)v \tag{3.21}$$

和对于 $s\leqslant t$ 由(3.20)我们有

$$\frac{\partial^-}{\partial s} U(t,s)v = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\{U(t,s)v - U(t,s-h)v\}$$

$$= \lim_{h\downarrow 0} U(t,s) \left\{ \frac{v - U(s,s-h)v}{h} \right\}$$

$$= -U(t,s)A(s)v. \tag{3.22}$$

综合(3.21)和(3.22)即证 $U(t,s)$ 满足 (E_3)。

为了完成证明剩下需要指出 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是满足 (E_1) ，(E_2) 和 (E_3) 的唯一的发展系统。假设 $V(t,s)$ 是满足 (E_1)—(E_3) 的一个发展系统。对于 $v\in Y$ 考虑函数 $r\to V(t,r)U_n(r,s)v$。因为 $V(t,s)$ 满足 (E_3)，由 $U_n(t,s)$ 的构造，这个函数除了 r 的有限个值外是可微的，积分它的导数得

$$V(t,s)v - U_n(t,s)v = \int_s^t V(t,r)(A(r) - A_n(r))U_n(r,s)v\,dr,$$

因此

$$\|V(t,s)v - U_n(t,s)v\|$$
$$\leqslant M\widetilde{M}\, e^{\gamma(t-s)}\|v\|_Y\int_s^t \|A(r) - A_n(r)\|_{Y\to X}dr. \tag{3.23}$$

在(3.23)中让 $n\to\infty$，并利用 (3.4) 推出 $V(t,s)v = U(t,s)v$

对于 $v\in Y$ 成立。因为 Y 在 X 中稠密和 $U(t,s)$ 及 $V(t,s)$ 均满足 (E_1)，所以 $U(t,s)=V(t,s)$。证毕。

算子族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足 (H_2) 的假设并非总是容易检验。一个能在许多应用中被有效地验证的 (H_2) 的充分条件在上述定理2.4中已经给出。它是说 (H_2) 成立，如果存在 Y 到 X 上的一族同构 $\{Q(t)\}$ 使得 $\|Q(t)\|_{Y\to X}$ 和 $\|Q(t)\|^{-1}_{X\to Y}$ 是一致有界的和 $t\to Q(t)$ 依 $B(Y,X)$ 中的范数是有界变差的。

注 3.2 如果在定理3.2中 (H_3) 由以下较弱的条件代替：

$(H_3)'$ 对于 $t\in[0,T]$，$D(A(t))\supset Y$ 和 $A(t)\in L^1(0,T: B(Y,X))$。

我们仍然能对于初值问题 (3.1) 构造一个唯一的发展系统 $U(t,s)$。事实上，如果 $(H_3)'$ 成立，则存在 $[0,T]$ 的一个划分序列 $\{t_k^n\}_{n=1}^{N(n)}$ 使得当 $n\to\infty$ 时，$\delta_n=\max\{t_{k+1}^n-t_k^n\}\to 0$，并且如同定理3.1的证明中一样构造相应的算子 $A_n(t)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T\|A_n(\tau)-A(\tau)\|_{Y\to X}\,d\tau=0. \tag{3.24}$$

如定理3.1的证明中一样构造 $U_n(t,s)$，只是用划分 $\{t_k^n\}_{k=1}^{N(n)}$ 代替划分 $\left\{\frac{k}{n}T\right\}_{k=1}^{n}$，由(3.14)连同 (3.24) 一起得到 $U_n(t,s)v$ 在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上一致收敛到 $U(t,s)v$。于是 $U(t,s)$ 存在和满足 (E_1)。此外，在这种情形，(3.19) 在 $[0,T]$ 上 $a.e.$ 成立，因此我们有

$(E_2)'$ $\quad \dfrac{\partial^+}{\partial t}U(t,s)v\Big|_{t=s}=A(s)v$，对于 $v\in Y$ 和 $a.e.$ 在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上成立。

类似的

$(E_3)'$ $\quad \frac{\partial}{\partial s} U(t,s)v = -U(t,s)A(s)v$, 对于 $v \in Y$ 和 a.e. 在 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ 上成立。

性质 $(E_2)'$, $(E_3)'$ 连同 (E_1) 和 $U(t,s)$ 的强连续性一起保证了 $U(t,s)$ 的唯一性。

§5.4 双曲型发展方程的正则解

设 X 和 Y 是 **Banach** 空间使得 Y 稠密地和连续地嵌入到 X 内。又设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$是 X 上一族 C_0 半群的无穷小生成元，满足前一节中的假设 (H_1)，(H_2) 和 (H_3)。设 $f \in C([s,T]:X)$，并考虑初值问题

$$
\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t) + f(t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \\ u(s) = v. \end{cases} \tag{4.1}
$$

一个函数 $u \in C([s,T];X)$ 称为(4.1)的一个古典解，如果 $u(t)$ 在 X 中对于 $t \in (s,T]$ 是连续可微的，$u(t) \in D(A(t))$ 对于 $s < t \leqslant T$ 成立和(4.1) 在 X 中成立。不幸的是我们不知道在双曲型的情形有任何简单的条件以保证初值问题 (4.1) 的古典解存在，甚至当 $f \equiv 0$ 时。为了在适当的条件下得到(4.1)的古典解，我们在本节将只限于讨论一种相当强的，因而十分受限制的 (4.1) 的解的概念，即 Y- 值解的概念。

定义 4.1 一个函数 $u \in C([s,T];Y)$ 称为初值问题(4.1)的一个 Y- 值解，如果 $u \in C^1((s,T];X)$ 和 (4.1)在 X 中成

立。

(4.1)的一个 Y- 值解 u 同一个古典解的区别在于它对于 $s\leqslant t\leqslant T$ 满足 $u(t)\in Y\subset D(A(t))$，而不仅仅是 $u(t)\in D(A(t))$；它依较强的 Y- 范数连续，而不仅仅是依 X- 范数。对于 Y- 值解我们有

定理 4.2 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 X 上一族 C_0 半群的无穷小生成元，满足定理3.1的条件 (H_1)—(H_3)。又设 $f\in C([s,T]:X)$。如果初值问题 (4.1) 有一个 Y- 值解 u，则这个解是唯一的，而且

$$u(t)=U(t,s)v+\int_s^t U(t,r)f(r)ds, \tag{4.2}$$

这里 $U(t,s)$ 是由定理3.1提供的发展系统。

证明 设 $U_n(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是在定理 3.1的证明中构造的发展系统（见(3.5)）. 又设 u 是(4.1) 的一个 Y-值解，由 $U_n(t,s)$ 和 u 的性质知函数 $r\to U_n(t,r)\,u(r)$ 在 X 中除了有限个 r 的值外是连续可微的和

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}U_n(t,r)u(r)=&-U_n(t,r)A_n(r)u(r)\\&+U_n(t,r)A(r)u(r)+U_n(t,r)f(r).\end{aligned} \tag{4.3}$$

从 s 到 t 对(4.3)积分我们得到

$$\begin{aligned}u(t)=&U_n(t,s)v+\int_s^t U_n(t,r)f(r)dr\\&+\int_s^t U_n(t,r)(A(r)-A_n(r))u(r)dr.\end{aligned} \tag{4.4}$$

记 $C=\max\limits_{s\leqslant r\leqslant T}\|u(r)\|_Y$，并利用(3.8)估计(4.4)我们得到

$$\left\|u(t)-U_n(t,s)v-\int_s^u U_n(t,r)f(r)dr\right\|$$

$$\leqslant M\, e^{\omega(t-s)} C \int_s^t \|A(r) - A_n(r)\|_{Y\to X} dr. \qquad (4.5)$$

在(4.5)中让 $n\to\infty$，并利用(3.4)和(3.15)我们得到(4.2)。u 的唯一性是表达式(4.2)的一个推论。

现在我们转到齐次初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), \text{ 对于 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, \\ u(s) = v. \end{cases} \qquad (4.6)$$

的 Y- 值解的存在性问题。由定理4.2，如果族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足定理3.1的条件和初值问题(4.6)有一个 Y- 值解，则这个解由 $u(t)=U(t,s)v$ 给出，这里 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是由定理 3.1 得到的相应于族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的发展系统。然而一般来说 $u(t)=U(t,s)v$ 不是 (4.6) 的 Y- 值解，即便 $v\in Y$。其理由是双重的，Y 不必是 $U(t,s)$ 的一个不变子空间，甚至它是这样一个不变子空间时，对于 $v\in Y$，$U(t,s)v$ 也不必依 Y- 范数连续。$U(t,s)$ 的这两个性质对于 $u(t)=U(t,s)v$是一个 (4.6) 的 Y- 值解是必要的。我们的下一个结果表明对于这种目的它们也是充分的。

定理 4.3 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足定理 3.1的条件。又设 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是在定理 3.1 中给出的发展系统。如果

(E_4) $U(t,s)Y\subset Y$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立

和

(E_5) 对 $v\in Y$，$U(t,s)$ 在 Y 中对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是连续的。

则对每一 $v\in Y$，$U(t,s)v$ 是初值问题(4.6)的唯一的 Y- 值

解。

证明 初值问题(4.6)的 Y-值解的唯一性是定理 4.2的一个直接推论。因此只须证明如果 $v\in Y$，则 $u(t)=U(t,s)v$ 是(4.6)的一个 Y-值解。由 (E_4) 和 (E_5) 知 $u(t)\in Y$ 对于 $s\leqslant t\leqslant T$ 成立和它对 $s\leqslant t\leqslant T$ 是依 Y-范数连续的。为了完成证明，剩下将指出 u 满足(4.6)中的微分方程。因为 $u(t)=U(t,s)v\in Y$ 对于 $s\leqslant t\leqslant T$ 成立，所以由 (E_2) 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^+}{\partial t}U(t,s)v &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{U(t+h,s)v-U(t,s)v}{h} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{U(t+h,t)-I}{h}U(t,s)v \\
&= A(t)U(t,s)v. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

(4.7)的右端是在 X 中连续的，因为 $t\to U(t,s)v$ 是依 Y-范数连续的和 $t\to A(t)$ 是在 $B(Y,X)$ 中连续的，因此 $U(t,s)v$ 的右导数在 X 中是连续的，并且作为一个推论 $U(t,s)v$ 在 X 中是可微的。由(4.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)v=A(t)U(t,s)v \text{ 对于 } s\leqslant t\leqslant T \text{ 成立。}$$

由定理 4.3，如果由定理 3.1 给出的发展系统 $U(t,s)$ 亦满足 (E_4) 和 (E_5)，则对每一 $v\in Y$，初值问题(4.6)有唯一的由 $U(t,s)v$ 给出的 Y-值解。为了得到一个满足 (E_1)—(E_3) 的发展系统 $U(t,s)$ 我们将用下面的条件代替定理 3.1 的条件 (H_2)：

$(H_2)^+$ 存在一族 Y 到 X 上的同构 $\{Q(t)\}_{t\in[0,T]}$ 使得对每一 $v\in Y$，$Q(t)v$ 在 X 中对于 $t\in[0,T]$是连续可微的和

$$Q(t)A(t)Q(t)^{-1}=A(t)+B(t), \tag{4.8}$$

这里 $B(t)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 是 X 上一个有界算子的强连续族。

在我们的主要结果定理 4.6 的证明中我们将需要下面的两个技巧性的结果。

引理 4.4 条件 (H_1) 和 $(H_2)^+$ 蕴涵条件 (H_2)。

证明 由 $(H_2)^+$ 对每一 $v\in Y$，$t\to\frac{dQ(t)v}{dt}$ 在 X 中对于 $t\in[0,T]$ 是连续的。因此 $\left\|\frac{dQ(t)}{dt}\right\|_{Y\to X}$ 在 $[0,T]$ 上是有界的。由此推出 $t\to Q(t)$ 是 Lipschitz 连续的。从而它在 $[0,T]$ 上依 $B(Y,X)$ 的范数是有界变差的和 $\|Q(t)\|_{Y\to X}$ 在 $[0,T]$ 上是有界的。$t\to Q(t)$ 在 $B(Y,X)$ 中的 Lipschitz 连续性亦推出 $t\to Q(t)^{-1}$ 在 $B(X,Y)$ 中的连续性。因此 $\|Q(t)^{-1}\|_{X\to Y}$ 在 $[0,T]$ 上是有界的。因为由 (H_1)，$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 在 X 中是稳定的，所以由定理 2.3，$\{A(t)+B(t)\}_{t\in[0,T]}$ 在 X 中是一个稳定族。则由定理 2.4 对每一 $t\in[0,T]$，Y 是 $A(t)$-容许的，并且 $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 Y 中的一个稳定族。

引理 4.5 设 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是 Banach 空间 X 中满足 $\|U(t,s)\|\leqslant M$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立的发展系统。设 $H(t)$ 是 X 中的有界线性算子的强连续族，则存在 X 上的唯一的有界线性算子族 $V(t,s)$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 使得

$$V(t,s)x=U(t,s)x+\int_s^t V(t,r)f(r)U(r,s)x\,dr,$$

$$\text{对于 } x\in X \text{ 成立。} \tag{4.9}$$

和 $V(t,s)x$ 关于 s，t 在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上是连续的。

证明 设 $V^{(0)}(t,s)=U(t,s)$ 和定义

$$V^{(m)}(t,s)x=\int_s^t V^{(m-1)}(t,r)H(r)U(r,s)dr,\quad \text{对于 } x\in X. \tag{4.10}$$

对 m 用归纳法易见(4.10)中的被积函数在 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant T$ 上是连续的。由一致有界性原理存在 $H>0$ 使得 $\|H(t)\|\leqslant H$ 对于 $t\in[0,T]$ 成立，并且对 m 用归纳法容易验证估计

$$\|V^{(m)}(t,s)\|\leqslant M^{m+1}H^m\frac{(t-s)^m}{m!}$$

成立。因此级数

$$V(t,s)=\sum_{m=0}^{\infty}V^{(m)}(t,s) \tag{4.11}$$

在 X 中依一致算子拓扑收敛，并且如此定义的 $V(t,s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上是强连续的。此外由(4.10)和(4.11)，$V(t,s)$ 满足(4.9)。为完成证明剩下将指出 $V(t,s)$ 的唯一性。设 $V_1(t,s)$ 满足(4.9)和命 $W(t,s)=V(t,s)-V_1(t,s)$，则

$$W(t,s)x=\int_s^t W(t,r)H(r)U(r,s)x\,dr,\quad \text{对于 } x\in X \text{ 成立。} \tag{4.12}$$

若 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 依一致算子拓扑连续，则 $W(t,s)$ 亦如此，于是由(4.12)

$$\|W(t,s)\|\leqslant M\,H\int_s^t\|H(t,r)\|dr.$$

从而 Gronwall 不等式推出 $W(t,s)=0$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立，因此 $V(t,s)=V_1(t,s)$。若 $U(t,s)$ 仅强连续，则可用依

一致算子拓扑连续的 $U(t,s)$ 强逼近，因此同样可证 $V(t,s)=V_1(t,s)$。证毕。

本节主要结果是

定理 4.6 设 $A(t)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 是 X 上的 C_0 半群的无穷小生成元。如果族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足条件 (H_1)，$(H_2)^+$ 和 (H_3)，则在 X 中存在唯一的发展系统 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 满足 (E_1)—(E_5)。

证明 由引理 4.4，$\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足条件 (H_1)，(H_2) 和 (H_3)，因此由定理 3.1 存在唯一的发展系统 $U(t,s)$ 满足 (E_1)—(E_3)。

设 $v\in Y$ 和用 $\dot{Q}(t)v$ 表示 $Q(t)v$ 的导数。命

$$C(t)=\dot{Q}(t)Q(t)^{-1}. \tag{4.13}$$

$C(t)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 显然是 X 上的一个有界算子的强连续族。设 $W(t,s)$ 是积分方程

$$W(t,s)x=U(t,s)x+\int_s^t W(t,r)[B(r)+C(r)]U(r,s)x\,dr,$$

$$\text{对于 } x\in X \text{ 成立。} \tag{4.14}$$

的唯一解。$W(t,s)$ 的存在性，唯一性和有关性质由引理 4.5 得到。以下我们证明

$$U(t,s)=Q(t)^{-1}W(t,s)Q(s). \tag{4.15}$$

由(4.15)，$U(t,s)Y\subset Y$，因为 $W(t,s)\in B(X)$。于是 $U(t,s)$ 满足 (E_4)。此外，由 $W(t,s)x$ 在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上的连续性和 $Q(s)$，$Q(t)^{-1}$ 的性质推出 $U(t,s)$ 在 Y 中对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是强连续的。因此满足 (E_5)。

现在我们转向 (4.15) 的证明。首先我们注意，由我们

对 $Q(t)$ 的假设易知对每一 $x\in X$，$Q(t)^{-1}x$ 在 Y 中是可微的和

$$\frac{d}{dt}(Q(t)^{-1}x) = -Q(t)^{-1}\dot{Q}(t)Q(t)^{-1}x. \qquad (4.16)$$

命

$$Q(t,r) = U(t,r)Q(r)^{-1}. \qquad (4.17)$$

由 (E_3) 和(4.16)对每一 $x\in X$，$r\to Q(t,r)x$ 在 X 中是可微的和

$$\frac{\partial}{\partial r}Q(t,r)x = -U(t,r)A(r)Q(r)^{-1}x - U(t,r)Q(r)^{-1}\dot{Q}(r)$$

$$Q(r)^{-1}x = -U(t,r)A(r)Q(r)^{-1}x - Q(t,r)C(r)x.$$

但对每一 $v\in Y$ 由 $(H_2)^+$ 我们有

$$A(r)Q(r)^{-1}v = Q(r)^{-1}(A(r)+B(r))v,$$

因此对于 $v\in Y$

$$\frac{\partial}{\partial r}Q(t,r)v = -Q(t,r)[A(r)+B(r)+C(r)]v. \quad (4.18)$$

设 $U_n(t,s)$ 是在定理 3.1 的证明中（见(3.5)）构造的算子，则由 (3.10)

$$\frac{\partial}{\partial r}U_n(r,s)v = A_n(r)U_n(r,s)v, \text{ 对于 } v\in Y \text{ 成立.}$$

$$(4.19)$$

这里除了 r 的有限个值外 (4.19) 对所有 $s\leqslant r$ 成立. 综合(4.18)和(4.19)我们得到

$$\frac{\partial}{\partial r}Q(t,r)U_n(r,s)\nu = -Q(t,r)(A(r)+B(r)+C(r) - A_n(r))U_n(r,s)\nu. \tag{4.20}$$

从 $r=s$ 到 $r=t$ 积分(4.20)得

$$Q(t)^{-1}U_n(t,s)\nu - Q(t,s)\nu = -\int_s^t Q(t,r)(A(r)+B(r)+C(r)-A_n(r))U_n(r,s)\nu dr. \tag{4.21}$$

由 (E_1) 和(3.12)我们导出

$$\left\|\int_s^t Q(t,r)(A(r)-A_n(r))Q_n(r,s)\nu\, dr\right\| \leqslant M\widetilde{M}e^{\gamma(t-s)}\|\nu\|_Y\int_s^t \|A(r)-A_n(r)\|_{Y\to X}dr, \tag{4.22}$$

这里 $\gamma=\max(\omega,\widetilde{\omega})$。在(4.21)中让 $n\to\infty$ 取极限，并利用(4.22)和(3.15)，我们对 $\nu\in Y$ 得到

$$Q(t)^{-1}U(t,s)\nu - Q(t,s)\nu = -\int_s^t Q(t,r)(B(r)+C(r))U(r,s)\nu\, dr. \tag{4.23}$$

因为(4.23)中所有算子在 X 中是有界的和 Y 在 X 中稠密，所以对每一 $\nu\in X$，(4.23)成立。因此经过整理后我们有

$$Q(t,s)x = Q(t)^{-1}U(t,s)x + \int_s^t Q(t,r)(B(r)+C(r))U(r,s)x\, dr. \tag{4.24}$$

另一方面用 $Q(t)^{-1}$ 左乘以(4.14)得

$$Q(t)^{-1}W(t,s)x = Q(t)^{-1}U(t,s)x + \int_s^t Q(t)^{-1}W(t,r)(B(r)+C(r))U(r,s)x\, dr. \tag{4.25}$$

由(4.24)和(4.25)的解的唯一性得

$$U(t,s)Q(s)^{-1}=Q(t,s)=Q(t)^{-1}W(t,s).$$

由此推出(4.15)。证毕。

由定理 4.6 和 4.3 我们得到，

推论 4.7 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 X 上一族 C_0 半群的无穷小生成元。如果 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足条件 (H_1)，$(H_2)^+$ 和 (H_3)，则对每一 $v\in Y$，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}=A(t)u(t), & s<t\leqslant T,\\ u(s)=v, \end{cases} \tag{4.26}$$

在 $s\leqslant t\leqslant T$ 上有唯一的 Y- 值解。

定理的条件能够容易验证的一种特殊情形是 $D(A(t))=D$ 不依赖于 t。在这种情形我们在 D 中定义范数 $\|\cdot\|_Y$ 如下

$$\|v\|_Y=\|v\|+\|A(0)v\|, \quad 对于\ v\in Y=D. \tag{4.27}$$

不难看出，由 $A(0)$ 的闭性，当 D 赋予这个范数后是一个 Banach 空间，我们用 Y 来表示。显然，Y 稠密地和连续地嵌入到 X 内，并且我们有

定理 4.8 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 X 上一个 C_0 半群的无穷小生成元的稳定族。如果 $D(A(t))=D$ 是不依赖于 t 的和对 $v\in D$，$A(t)v$ 在 X 中是连续可微的，则存在唯一的发展系统 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 满足 (E_1)—(E_5)，这里 Y 是 D 赋予由(4.27)给出的范数 $\|\cdot\|_Y$ 的空间。

证明 我们将证明 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足条件 (H_1)，$(H_2)^+$ 和 (H_3)。条件 (H_1) 已经明确地在我们的定理中被假设了。显然 $A(t)v$ 在 X 中的连续可微性推出 $t\to A(t)$ 是依 $B(Y,X)$ 中的范数连续的，从而 (H_3) 成立。为证明 $(H_2)^+$ 注意对

$\lambda_0>\omega$ 算子 $Q(t)=\lambda_0 I-A(t)$ 是一个 Y 到 X 上的同构和由我们对 $A(t)u$ 的假设知对每一 $v\in Y$, $Q(t)v$ 在 X 中是连续可微的。最后

$$Q(t)A(t)Q(t)^{-1}=A(t),$$

因此(4.8)对于 $B(t)\equiv 0$ 成立。因此 $(H_2)^+$ 成立。证毕。

§5.5 双曲型非齐次方程

本节给出一些关于双曲型非齐次初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt}=A(t)u(t)+f(t), & 0\leqslant s<t\leqslant T, \\ u(s)=v \end{cases} \tag{5.1}$$

的解的注记。在 5.3 节我们已经考虑了相应的齐次初值问题和在假设 (H_1)—(H_3) 下我们已经构造了（定理 3.1）唯一的发展系统 $U(t,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 满足性质 (E_1)—(E_3)。同自治情形（见 4.2 节）类似我们给出以下定义。

定义 5.1 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足定理 3.1 的条件。又设 $U(t,s)$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 是由定理 3.1 给出的发展系统。对每一 $f\in L^1(s,T:X)$ 和 $v\in X$, 连续函数

$$u(t)=U(t,s)v+\int_s^t U(t,r)f(r)dr \tag{5.2}$$

称为初值问题(5.1)的 mild 解。

由 5.1 节结尾处的注记如果发展系统 $U(t,s)$ 是充分正则的和 $f\in C^1([s,T];X)$, 则初值值问题(5.1)对每一 $v\in D(A(s))$ 有唯一的古典解，并且该解同 mild 解 (5.2)一致。

对于(5.1)的 Y- 值解一个类似结果（定理 4.2）成立。

对于非齐次初值问题，下一个定理提供了 Y- 值解的存在性。

定理 5.2 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足定理 4.3 的条件。如果 $f\in C([s,T];Y)$，则对每一 $v\in Y$，初值问题 (5.1) 具有由 (5.2)给出的唯一的 Y- 值解 u。

证明 在定理 4.3 中已经指出 $U(t,s)v$ 是齐次初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt}=A(t)u(t), \quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, \\ u(s)=v \end{cases} \tag{5.3}$$

的一个 Y- 值解。为了证明由(5.2)给出的 u 是(5.1)的一个 Y- 值解我们将指出

$$W(t)=\int_s^t U(t,r)f(r)dr \tag{5.4}$$

是(5.1)具有初值 $W(s)=v=0$ 的 Y- 值解。由我们对 f 的假设和 (E_4) 即知 $W(t)\in Y$ 对于 $s\leqslant t\leqslant T$ 成立。由 (E_5)，$r\to U(t,r)f(r)$ 在 Y 中是连续的。由此推出 $t\to W(t)$ 在 Y 中是连续的和对于 $s\leqslant t\leqslant T$，$r\to A(t)U(t,r)f(r)$ 在 X 中是连续的。$r\to A(t)U(t,r)f(r)$ 的连续性推出 $W(t)$ 在 X 中是连续可微的和

$$\frac{dW(t)}{dt}=A(t)W(t)+f(t) \quad 对于\ s\leqslant t\leqslant T$$

在 X 中成立，如所期望的那样。最后(5.1)的 Y 值解的唯一性是定理 4.2 的一个直接推论。

定理 5.2 表明如果 X 上的 C_0 半群的无穷小生成元族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足条件 (H_1)，$(H_2)^+$ 和 (H_3)，则对每一

$v\in Y$ 和 $f\in C([s,T]:Y)$，初值问题(5.1)具有由 (5.2) 给出的唯一的 Y-值解 u。这是推论 4.2.6 的一个简单推广。

我们的下一个结果是考虑对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 所有算子 $A(t)$ 有一个不依赖于 t 的公共定义域 D 的特殊情形。这是推论 4.2.5 的一个简单推广。

定理 5.3 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是 X 上的 C_0 半群的无穷小生成元的一个稳定族，使得 $D(A(t))=D$ 不依赖于 t 和对每一 $v\in D$，$A(t)v$ 在 X 中连续可微。如果 $f\in C^1([s,T]:X)$，则对每一 $v\in D$，初值问题有唯一的古典解 u 由下式给出：

$$u(t)=U(t,s)v+\int_s^t U(t,r)f(r)dr. \tag{5.5}$$

证明 象在定理 4.8 中一样我们赋予 D 以 $A(0)$ 的图象范数并用 Y 表示该 Banach 空间。于是由我们的假设，对充分大的 λ_0 和每一 $t\in[0,T]$，$Q(t)=\lambda_0 I-A(t)$ 是一个 Y 到 X 上的同构，使得 $Q(t)v$ 在 X 中对每一 $v\in Y$ 是连续可微的。我们用 $\dot{Q}(t)v$ 表示 $Q(t)v$ 的导数。由定理 4.8 $U(t,s)v$ 是齐次初值问题 (5.3) 的 Y-值解。因此为了证明由 (5.5) 给出的 u 是(5.1) 的一个古典解只须证明

$$W(t)=\int_s^t U(t,r)f(r)dr$$

是(5.1)满足 $W(s)=0$ 的一个古典解。为此我们首先注意 $Q(r)f(r)$ 在 Y 中是可微的和

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(Q(r)^{-1}f(r))&=Q(r)^{-1}\dot{Q}(r)Q(r)f(r)+Q(r)^{-1}f'(r)\\&=Q(r)^{-1}g(r).\end{aligned} \tag{5.6}$$

这里 $f'(r)$ 是 $f(r)$ 的导数和 $g(r)=f'(r)-\dot{Q}(r)Q(r)^{-1}f(r)$。

对 r 微分 $U(t,r)Q(r)^{-1}f(r)$ 并利用 (E_3) 和 (5.6) 我们得到

$$\frac{\partial}{\partial r}U(t,r)Q(r)^{-1}f(r)$$

$$= -U(t,r)A(r)Q(r)^{-1}f(r) + U(t,r)Q(r)^{-1}g(r)$$

$$= U(t,r)f(r) + U(t,r)Q(r)^{-1}(g(r) - \lambda_0 f(r)).$$

从 $r=s$ 到 $r=t$ 积分该等式在重新排列后我们得到

$$W(t) = Q(t)^{-1}f(r) - [U(t,s)Q(s)^{-1}f(s)$$

$$+ \int_s^t U(t,r)Q(r)^{-1}(g(r) - \lambda_0 f(r))dr]$$

$$= Q(t)^{-1}f(t) - v(t), \tag{5.7}$$

这里 $v(t)$ 由 (5.7)的第二个等式定义。因为 $Q(s)^{-1}f(s) \in Y$ 和 $r \to Q(r)^{-1}(g(r) - \lambda_0 f(r))$ 在 Y 中对于 $x \in [s,T]$ 是连续的，所以从定理 5.2 得

$$\frac{dv(t)}{dt} = A(t)v(t) + Q(t)^{-1}(g(t) - \lambda_0 f(t))$$

$$\text{对于 } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \text{ 成立。} \tag{5.8}$$

因此

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(Q(t)^{-1}f(t)) - \frac{dv(t)}{dt}$$

$$= Q(t)^{-1}g(t) - Q(t)^{-1}(g(t) - \lambda_0 f(t)) - A(t)v(t)$$

$$= A(t)W(t) + \lambda_0 Q(t)^{-1}f(t) - A(t)Q(t)^{-1}f(t)$$

$$= A(t)W(t) + f(t).$$

因为 $\frac{dv(t)}{dt}$ 和 $Q(t)^{-1}g(t)$ 在 X 中是连续的，所以 $\frac{dW(t)}{dt}$ 在 X 中是连续的和 W 是(5.1)对于 $\nu=0$ 的一个古典解。为

了证明古典解 u 的唯一性。设 v_1 是 (5.1) 的一个古典解。由我们的假设和 $U(t,s)$ 的性质（见定理 4.8），$r\to U(t,r)f(r)$ 在 X 中是连续可微的和

$$\frac{\partial}{\partial r}U(t,r)v_1(r)=U(t,r)f(r).$$

从 s 到 t 积分该等式得到 $v_1(t)=u(t)$。

§5.6 抛物型初值问题的一个发展系统

本节开始这一章的第二部分，我们研究抛物型*) 初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=f(t), & 0\leqslant s<t\leqslant T,\\ u(s)=x.\end{cases}\tag{6.1}$$

这一部分的结果是同 §5.2—5.5 节中处理的相应的双曲型情形的结果无关的。对于抛物型初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+A(t)v(t)=0, & 0\leqslant s<t\leqslant T,\\ u(s)=x\end{cases}\tag{6.2}$$

的发展系统将在下面用一个完全不同于在双曲情形（§5.3 节）中所采用的方法来构造。本节致力于构造这种发展系统并研究其主要的性质。

---

*) 在抛物情形习惯上将 $A(t)u(t)$ 项写在方程的左边，这样做是为了避免在应用 $A(t)$ 的分数幂时有关记号上的困难。

我们首先作一种形式的计算以引导我们得到构造发展系统的方法。假设对每一 $t\in[0,T]$，$-A(t)$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群 $S_t(s)$，$s\geq 0$ 的无穷小生成元和 $U(t,s)$ 是关于(6.2)的一个发展系统。命

$$U(t,s)=S_s(t-s)+W(t,s)$$
$$=S_s(t-s)+\int_s^t S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\,d\tau. \qquad (6.3)$$

于是（形式地）

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=-A(s)S_s(t-s)+R(t,s)$$
$$-\int_s^t A(\tau)S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)\,d\tau$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)+A(t)U(t,s)=R(t,s)-R_1(t,s)$$
$$-\int_s^t R_1(t,\tau)R(\tau,s)\,d\tau, \qquad (6.4)$$

这里

$$R_1(t,s)=(A(s)-A(t))S_s(t-s). \qquad (6.5)$$

因为 $U(t,s)$ 是关于(6.4)的发展系统，所以由(6.4)，积分方程

$$R(t,s)=R_1(t,s)+\int_s^t R_1(t,\tau)R(\tau,s)\,d\tau \qquad (6.6)$$

必成立。给定 $R_1(t,s)$ 我们试图作相反的论证，即对 $R(t,s)$ 解积分方程(6.6)，然后由(6.3)定义 $U(t,s)$，实际上这将是下面构造 $U(t,s)$ 的方法。为严格地实施这一构想我们需

要以下假设：

(P_1)　$A(t)$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 的定义域 $D(A(t))=D$ 在 X 中稠密和不依赖于 t。

(P_2)　对 $t\in[0,T]$，$A(t)$ 的预解式 $R(\lambda;A(t))$ 对于所有使得 $Re\lambda\leqslant 0$ 的 λ 存在和存在常数 M 使得

$$\|R(\lambda;A(t))\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|+1},\ \text{对于 } Re\lambda\leqslant 0,\ t\in[0,T] \text{ 成立。} \tag{6.7}$$

(P_3)　存在常数 L 和 $0<\alpha\leqslant 1$ 使得

$$\|(A(t)-A(s))A(\tau)^{-1}\|\leqslant L|t-s|^{\alpha},\ \text{对于 } s,t,\tau\in[0,T] \text{ 成立。} \tag{6.8}$$

我们注意 (P_1)—(P_3) 成立的区间取做 $[0,T]$ 仅仅是为了记号上的方便。下面证明的所有结果对任何使这些假设成立的区间 $[a,b]$，$0\leqslant a<b<\infty$ 都成立。

本节的主要结果是

定理 6.1　在假设 (P_1)—(P_2) 之下，存在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 上的唯一的发展系统 $U(t,s)$ 满足

$(E_1)'$　$\|U(t,s)\|\leqslant C$，对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立。

$(E_2)^+$　对于 $0\leqslant s<t\leqslant T$，$U(t,s):X\to D$ 和 $t\to U(t,s)$ 在 X 中强可微。导数 $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\in B(X)$ 和它在 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 上是强连续的，此外

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)+A(t)U(t,s)=0 \text{ 对于 } 0\leqslant s<t\leqslant T \text{ 成立，} \tag{6.9}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) \right\| = \|A(t)U(t,s)\| \leq \frac{C}{t-s} \qquad (6.10)$$

和

$$\|A(t)U(t,s)A(s)^{-1}\| \leq C, \text{ 对于 } 0 \leq s \leq t \leq T \text{ 成立。} \qquad (6.11)$$

$(E_3)^+$ 对每一 $v \in D$ 和 $t \in (0,T]$. $U(t,s)v$ 关于 s 在 $0 \leq s \leq t \leq T$ 上是可微的和

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t,s)v = U(t,s)A(s)v. \qquad (6.12)$$

定理 6.1 的证明将占据本节的大部分。这将分成三个主要部分。在第一部分，我们将通过解积分方程 (6.6) 构造 $U(t,s)$ 和利用(6.3)定义 $U(t,s)$。在第二部分，我们将证明 $U(t,s)$ 满足 $(E_2)^+$ 中叙述的性质。在第三部分，$U(t,s)$ 的唯一性连同 $U(t,s)=U(t,r)U(r,s)$，对于 $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$ 成立和 $(E_3)^+$ 将被证明。

在开始证明之前我们推导假设 (P_1)—(P_3) 的一些直接推论。首先我们注意 (P_2) 和 D 在 X 中稠密的事实蕴涵对每一 $t \in [0,T]$，$-A(t)$ 是一个解析半群 $S_t(s)$，$s \geq 0$ 的无穷小生成元，它满足（见定理 2.5.2）

$$\|S_t(s)\| \leq C \text{ 对于 } s \geq 0 \text{ 成立,} \qquad (6.13)$$

$$\|A(t)S_t(s)\| \leq \frac{C}{s} \quad \text{对于 } s > 0 \text{ 成立,} \qquad (6.14)$$

这里及以后我们用 C 表示一个一般的常数。由 (P_2) 又存在一个角 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得

$$\rho(A(t))\supset\Sigma=\{\lambda: |\arg\lambda|\geq\theta\}\cup\{0\} \qquad (6.15)$$

和对所有 $\lambda\in\Sigma$，(6.7) 成立，只是可能具有不同的常数 M。

假设 (P_1)—(P_3) 的更多的一些推论集中在下一个引理中。

引理 6.2 设 (P_1)—(P_3) 被满足，则

$$\|(A(t_1)-A(t_2))S_\tau(s)\|\leq\frac{C}{s}|t_1-t_2|^\alpha$$

$$\text{对于 } s\in(0,T],\ t_1,t_2\in[0,T] \text{ 成立。} \qquad (6.16)$$

$$\|A(t)(S_\tau(s_2)-S_\tau(s_1))\|\leq\frac{C}{s_1s_2}|s_2-s_1|$$

$$\text{对于 } s_1,s_2\in(0,T],\ t,\tau\in[0,T] \text{ 成立。} \qquad (6.17)$$

$$\|A(t)(S_{\tau_1}(s)-S_{\tau_2}(s))\|\leq\frac{C}{s}|\tau_1-\tau_2|^\alpha$$

$$\text{对于 } s\in(0,T],\ t,\tau_1,\tau_2\in[0,T] \text{ 成立。} \qquad (6.18)$$

此外，对于 $s\in(0,T]$，$\tau,t\in[0,T]$，$A(t)S_\tau(s)\in B(X)$ 和 $B(X)$ 值函数 $A(t)S_\tau(s)$ 对每一 $\varepsilon>0$，在 $s\in[\varepsilon,T]$，$t,\tau\in[0,T]$ 上是一致算子拓扑一致连续的。

证明 因为对于 $s>0$，$S_\tau(s)$：$X\to D$（定理 2.5.2），所以由闭图象定理对 $t,\tau\in[0,T]$，$s\in(0,T]$，$A(s)S_\tau(s)$ 是一个有界线性算子，由(6.8)和(6.14)我们有

$$\|(A(t_1)-A(t_2))S_\tau(s)\|\leq\|(A(t_1)-A(t_2))A(\tau)^{-1}\|\cdot$$

$$\|A(\tau)S_\tau(s)\|\leq\frac{C}{s}|t_2-t_1|^\alpha$$

这就证明了(6.16)。为了证明 (6.11) 设 $0<s_1\leq s_2$ 和 $x\in X$。由 §2.5 节的结果我们有

$$A(\tau)S_\tau(s_2)x - A(\tau)S_\tau(s_1)x = -\int_{s_1}^{s_2} A(\tau)^2 S_\tau(\sigma)x\, d\sigma$$

$$= -\int_{s_1}^{s_2}\left(A(\tau)S_\tau\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)^2 x\, d\sigma,$$

因此由(6.14)

$$\|A(\tau)S_\tau(s_2)x - A(\tau)S_\tau(s_1)x\|$$

$$\leqslant C\|x\|\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{\sigma^2}d\sigma = \frac{C\|x\|}{s_1 s_2}|s_2 - s_1|.$$

因为由(6.8)，$\|A(t)A(\tau)^{-1}\|\leqslant C$ 对于 $t,\tau\in[0,T]$ 成立，我们得到

$$\|A(t)(S_\tau(s_1) - S_\tau(s_2))\|\leqslant\|A(t)A(\tau)^{-1}\|\cdot$$

$$\|A(\tau)(S_\tau(s_1) - S_\tau(s_2))\|\leqslant\frac{C}{s_2 s_1}|s_2 - s_1|$$

这就证明了(6.17)。

为了证明(6.18)注意由 (P_2) 得

$$\|A(t)R(\lambda;\ A(t))\|\leqslant C,\ \text{对于}\ 0\leqslant t\leqslant T\ \text{成立},$$

因此

$$\begin{aligned}
&\|A(t)(R(\lambda;A(\tau_1)) - R(\lambda;A(\tau_2)))\|\\
&\quad = \|A(t)R(\lambda;A(\tau_1))(A(\tau_1) - A(\tau_2))R(\lambda;A(\tau_2))\|\\
&\quad \leqslant \|A(t)A(\tau_1)^{-1}\|\cdot\|A(\tau_1)R(\lambda;A(\tau_1))\|\\
&\qquad \cdot\|(A(\tau_1) - A(\tau_2))A(\tau_2)^{-1}\|\cdot\|A(\tau_2)R(\lambda;A(\tau_2))\|\\
&\quad \leqslant C|\tau_1 - \tau_2|^\alpha
\end{aligned} \tag{6.19}$$

由 2.5 节的结果我们得到以下的表达式

$$A(t)S_{\tau_1}(s)x - A(t)S_{\tau_2}(s)x$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{-\lambda s}A(t)(R(\lambda;A(\tau_1))-R(\lambda;A(\tau_2)))x\,d\lambda,$$

(6.20)

这里 Γ 是 Σ 中连接 $\infty e^{-i\vartheta}$ 和 $\infty e^{i\vartheta}$ 的一条光滑路径. 用(6.19)估计(6.20)我们得到

$$\|A(t)S_{\tau_1}(s)x-A(t)S_{\tau_2}(s)x\|$$

$$\leqslant C|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}|x\|\int_{\Gamma}|e^{-\lambda s}||d\lambda|\leqslant\frac{C}{s}|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}\|x\|$$

最后为了证明对 $t,\tau\in[0,T]$, $s\in[\varepsilon,T]$, $A(t)S_{\tau}(s)$ 依一致算子拓扑的一致连续性我们仅需综合(6.16), (6.17), (6.18)并用三角不等式。

推论 6·3 算子 $R_1(t,s)=(A(s)-A(t))S_s(t-s)$ 对每一 $\varepsilon>0$, 在 $0\leqslant s\leqslant t-\varepsilon<T$ 上是依一致算子拓扑一致连续的和

$$\|R_1(t,s)\|\leqslant C|t-s|^{\alpha-1},\ \text{对于}\ 0\leqslant s<t\leqslant T\text{成立。}\quad(6.21)$$

证明 第一部分结论是 $A(t)S_{\tau}(s)$ 在 $B(X)$ 中的一致连续性的一个直接推论, 而(6.21)由下式得到

$$\|R_1(t,s)\|\leqslant\|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\|\cdot\|A(s)S_s(t-s)\|$$
$$\leqslant C|t-s|^{\alpha}|t-s|^{-1}=C|t-s|^{\alpha-1}.$$

现在我们准备开始构造 $U(t,s)$。

Ⅰ. 发展系统的构造

我们从对 $R(t,s)$ 解积分方程(6.6)开始, 如果 $R_1(t,s)$ 满足(6.21), 则(6.6)能用逐次逼近法求解如下: 对于 $m\geqslant1$ 我们归纳地定义

$$R_{m+1}(t,s)=\int_s^t R_1(t,\tau)R_m(\tau,s)d\tau. \qquad (6.22)$$

于是我们用归纳法证明 $R_m(t,s)$ 对 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 是依一致算子拓扑连续的和

$$|R_m(t,s)|\leqslant\frac{(C\Gamma(\alpha))^m}{\Gamma(m\alpha)}(t-s)^{m\alpha-1}, \qquad (6.23)$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 是古典的 γ- 函数。在(6.23)的归纳证明中我们利用了熟知的不等式

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}d\tau=(t-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad (6.24)$$

它对每一 α, $\beta>0$ 成立。我们注意定义 $R_{m+1}(t,s)$ 的积分是一个反常积分，其存在性是(6.23)的一个直接推论。$R_{m+1}(t,s)$ 的连续性也容易从 $R_m(t;s)$, $R_1(t;s)$ 的连续性及(6.23)得到。

估计(6.23)推出级数

$$R(t,s)=\sum_{m=1}^{\infty} R\ (t,s)$$

对每一 $\varepsilon>0$ 在 $0\leqslant s\leqslant t-\varepsilon\leqslant T$ 上依一致算子拓扑一致收敛。作为一个推论，$R(t,s)$ 对每一 $\varepsilon>0$ 在 $0\leqslant s\leqslant t-\varepsilon\leqslant T$ 上是在 $B(X)$ 中一致连续的。

由(6.22)得

$$R(t,s)=\sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s)$$

$$= R_1(t,s) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_s^t R_1(t,\tau) R_m(\tau,s) d\tau. \qquad (6.25)$$

$R_m(t,s)$ 对于 $m \geqslant 1$ 的连续性以及(6.21)和(6.23)推出能改变(6.25)中的求和和积分的次序。由此可见 $R(t,s)$ 是积分方程(6.6)的一个解。此外

$$\|R(t,s)\| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma(m\alpha)^{-1}(C\Gamma(\alpha))^m (t-s)^{m\alpha-1}$$

$$\leqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty} \Gamma(m\alpha)^{-1}(C\Gamma(\alpha)^m T^{\alpha(m-1)})\right)(t-s)^{\alpha-1}$$

$$\leqslant C(t-s)^{\alpha-1}. \qquad (6.26)$$

由(6.3)定义 $U(t,s)$，从 $S_s(\tau)$ 的强连续性以及(6.13)和(6.26)容易推出 $U(t,s)$ 对于 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ 是强连续的和

$$\|U(t,s)\| \leqslant \|S_s(t-s)\| + \int_s^t \|S_\tau(t-\tau)\| \cdot \|R(\tau,s)\| d\tau$$

$$\leqslant C_1 + C_2 \int_s^t (\tau-s)^{\alpha-1} d\tau \leqslant C. \qquad (6.27)$$

因此 $(E_1)'$ 成立，为了证明 $U(t,s)$ 对于 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ 是一个发展系统剩下只需证明 $U(t,s) = U(t,r)U(r,s)$ 对于 $s \leqslant r \leqslant t$ 成立。这由以下将证明的初值问题(6.2)的解的唯一性（定理 6.8）和由 $(E_2)^+$，(6.2)的解是 $U(t,s)x$ 的事实得到。

Ⅱ. $U(t,s)$的可微性

现在我们转到证明在上面构造的 $U(t,s)$ 有 $(E_2)^+$ 中叙述的性质。为此我们需要一些预备结果。

引理 6.4 对每一 β，$0 < \beta \leqslant \alpha$，存在常数 C_β 使得

$$\|R_1(t,s) - R_1(\tau,s)\| \leqslant C_\beta (t-\tau)^\beta (\tau-s)^{\alpha-\beta+1},$$

对于 $0\leqslant s<\tau<t\leqslant T$ 成立。 (6.28)

证明 我们有

$$R_1(t,s)-R_1(\tau,s)=(A(\tau)-A(t))S_s(t-s)$$
$$+(A(s)-A(\tau))(S_s(t-s)-S_s(\tau-s)).$$

由 (6.16)) 得

$$\|(A(\tau)-A(t))S_s(t-s)\|\leqslant C(t-\tau)^{\alpha}(t-s)^{-1}$$
$$\leqslant C(t-\tau)^{\alpha}(\tau-s)^{-1}.$$

又

$$\|(A(s)-A(\tau))(S_s(t-s)-S_s(\tau-s)\|$$
$$\leqslant\|(A(s)-A(\tau))A(s)^{-1}\|\cdot\|A(s)(S_s(t-s)-S_s(t-s))\|.$$

用(6.8)和(6.17)估计最后不等式的右端我们发现它是有界的，其界是 $C(\tau-s)^{\alpha-2}(t-\tau)$，而用(6.8)和(6.14)估计它我们发现其界是 $C(\tau-s)^{\alpha-1}$。因此

$$\|(A(s)-A(\tau))(S_s(t-s)-S_s(\tau-s))\|$$
$$\leqslant C[(\tau-s)^{\alpha-2}(t-\tau)]^{\alpha}[(\tau-s)^{\alpha-1}]^{1-\alpha}$$
$$=C(t-\tau)^{\alpha}(\tau-s)^{-1},$$

从而

$$\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|\leqslant C(t-\tau)^{\alpha}(\tau-s)^{-1}.$$

另一方面由(6.21)我们有

$$\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|\leqslant\|R_1(t,s)\|+\|R_1(\tau,s)\|$$
$$\leqslant C((t-s)^{\alpha-1}+(\tau-s)^{\alpha-1})\leqslant C(\tau-s)^{\alpha-1}.$$

对于 $\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|$ 的两个估计值作插值处理我们得到

$$\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|\leqslant C[(t-\tau)^{\alpha}(\tau-s)^{-1}]^{\beta/\alpha}\cdot$$
$$[(\tau-s)^{\alpha-1}]^{1-\beta/\alpha}\leqslant C(t-\tau)^{\beta}(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}.$$

推论 6.5 对每一 β，$0<\beta\leqslant\alpha$，存在常数 C_β 使得

$$\|R(t,s)-R(\tau,s)\|\leqslant C_\beta(t-\tau)^\beta(\tau-s)^{\alpha-\beta-1},$$

对于 $0\leqslant s<\tau<t\leqslant T$ 成立。　　　　(6.29)

证明　由积分方程(6.6)我们有

$$R(t,s)-R(\tau,s)=R_1(t,s)-R_1(\tau,s)+\int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma$$

$$+\int_s^\tau (R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma))R(\sigma,s)d\sigma.$$

估计(6.21)和(6.26)推出

$$\left\|\int_\tau^t R(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma\right\|$$

$$\leqslant C\int_\tau^t (t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-s)^{\alpha-1}d\sigma$$

$$\leqslant C(\tau-s)^{\alpha-1}\int_\tau^t (t-\sigma)^{\alpha-1}d\sigma$$

$$\leqslant C(\tau-s)^{\alpha-1}(t-\tau)^\alpha\leqslant C(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}(t-\tau)^\beta.$$

而(6.28)，(6.26)和(6.24)推出

$$\left\|\int_s^\tau (R_1(t,\sigma)-R_1(\tau,\sigma))R(\sigma,s)d\sigma\right\|$$

$$\leqslant C(t-\tau)^\beta\int_s^\tau(\tau-\sigma)^{\alpha-\beta-1}(\sigma-s)^{\alpha-1}d\sigma$$

$$\leqslant C(t-\tau)^\beta(\tau-s)^{2\alpha-\beta-1}\leqslant C(t-\tau)^\beta(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}.$$

现在估计(6.29)是(6.28)和最后两个不等式的一个直接推论。

引理 6.6　对每一 $x\in X$ 我们有

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} S_t(\varepsilon)x=x$，在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上是一致的。　　(6.30)

证明　对 $x\in D$ 我们有

$$x-S_t(\varepsilon)x=\int_0^\varepsilon A(t)S_t(\sigma)xd\sigma=\int_0^\varepsilon S_t(\sigma)A(t)xd\sigma.$$

因此

$$\|x-S_t(\varepsilon)x\|\leqslant\int_0\|S_t(\sigma)\|\cdot\|A(t)A(0)^{-1}\|\cdot\|A(0)x\|d\sigma$$
$$\leqslant\varepsilon C\|A(0)x\|$$

和(6.30)对每一 $x\in D$ 成立。因此 D 在 X 中稠密和 $\|S_t(s)\|\leqslant C$，所以对每一 $x\in X$ 通过逼近即得所证结果。

现在我们转向证明 $U(t,s)$ 的可微性。因为 $S_s(t-s)$ 对 $t>s$ 是可微的和 $\frac{\partial}{\partial t}S_s(t-s)=-A(s)S_s(t-s)$ 是一个有界线性算子，且对 $t>s$ 是在 $B(X)$ 中连续的，所以只须证明 $W(t,s)$ 的可微性。为此我们命

$$W_\varepsilon(t-s)=\int_s^{t-\varepsilon}S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)d\tau,\ \text{对于}\ 0<\varepsilon<t-s. \tag{6.31}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，$W_\varepsilon(t,s)\to W(t,s)$。此外 $W_\varepsilon(t,s)$ 关于 t 是可微的和

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t,s)=S_{t-\varepsilon}(\varepsilon)R(t-\varepsilon,s)$$
$$-\int_s^{t-\varepsilon}A(\tau)S_\tau(t-\tau)R(\tau,s)d\tau. \tag{6.32}$$

利用等式 $A(t)S_t(t-\tau)=\frac{\partial}{\partial t}S_t(t-\tau)$ 我们能重复写最后的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t,s)=S_{t-\varepsilon}(\varepsilon)R(t-\varepsilon,s)$$
$$+\int_s^{t-\varepsilon}(A(t)S_t(t-\tau)-A(\tau)S_\tau(t-\tau))R(\tau,s)d\tau$$

$$+\int_s^{t-\varepsilon} A(t)S_t(t-\tau)(R(t,s)-R(\tau,s))d\tau$$

$$+(S_t(t-s)-S_t(\varepsilon))R(t,s). \tag{6.33}$$

由(6.13)和(6.26)知(6.33)的右端的第一和最后一项是依范数有界的，其界是 $C(t-s-\varepsilon)^{\alpha-1}$，而从(6.16)和(6.18)我们容易推出

$$\|A(t)S_t(t-\tau)-A(\tau)S_\tau(t-\tau)\|\leqslant C(t-\tau)^{\alpha-1},$$

因此

$$\left\|\int_s^{t-\varepsilon}(A(t)S_t(t-\tau)-A(\tau)S_\tau(t-\tau))R(\tau,s)d\tau\right\|$$

$$\leqslant C\int_s^{t-\varepsilon}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\alpha-1}d\tau\leqslant C(t-s)^{2\alpha-1}$$

$$\leqslant C(t-s)^{\alpha}(t-s-\varepsilon)^{\alpha-1}\leqslant C(t-s-\varepsilon)^{\alpha-1}.$$

最后由(6.14)和(6.29)我们有

$$\left\|\int_s^{t-\varepsilon}A(t)S_t(t-\tau)(R(t,s)-R(\tau,s))d\tau\right\|$$

$$\leqslant C\int_s^{t-\varepsilon}(t-\tau)^{\beta-1}(\tau-s)^{\alpha-\beta-1}d\tau$$

$$\leqslant C(t-s)^{\alpha-1}\leqslant C(t-s-\varepsilon)^{\alpha-1}.$$

综合这些估计我们得到

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}W_\varepsilon(t,s)\right\|\leqslant\frac{C}{(t-s-\varepsilon)^{1-\alpha}} \tag{6.34}$$

这里 C 是一个不依赖于 $\varepsilon>0$ 的常数，在(6.33)的右端让 $\varepsilon\to0$ 并利用引理 6.6 我们看到当 $\varepsilon\to0$ 时，$\frac{\partial}{\partial t}W_\varepsilon(t,s)$ 强收敛。用 $W'(t,s)$ 表示其极限我们有

$$W'(t,s)=S_t(t-s)R(t,s)$$

$$+\int_s^t (A(t)S_t(t-\tau)-A(\tau)S_\tau(t-\tau))R(\tau,s)d\tau$$

$$+\int_s^t A(t)S_t(t-\tau)(R(t,s)-R(\tau,s))d\tau. \qquad (6.35)$$

由此推出对于 $0\leqslant s<t\leqslant T$，$W'(t,s)$ 是强连续的。此外，在(6.34)中让 $\varepsilon\to0$ 取极限得

$$\|W'(t,s)\|\leqslant C(t-s)^{\alpha-1}. \qquad (6.36)$$

现在，在

$$W_\varepsilon(t_2,s)-W_\varepsilon(t_1,s)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial \tau}W_\varepsilon(\tau,s)d\tau$$

中让 $\varepsilon\to0$ 得

$$W(t_2,s)-W(t_1,s)=\int_{t_1}^{t_2}W'(\tau,s)d\tau,$$

这里 $t_2>t_1>s+\varepsilon$。因为 $W'(t,s)$ 对于 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 是强连续的，所以 $W(t,s)$ 对于 t 是强连续可微的和

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t,s)=W'(t,s).$$

因此 $U(t,s)$ 是强连续可微的，

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=-A(s)S_s(t-s)+\frac{\partial}{\partial t}W(t,s),$$

并由(6.14)和(6.36)

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\right\|\leqslant\frac{C}{t-s}.$$

命

$U_\varepsilon(t,s)=S_\varepsilon(t-s)+W_\varepsilon(t,s)$，对于 $\varepsilon>0$ 和 $t-s>0$，

容易推出 $U_\varepsilon(t,s)$: $X\to D$ 和由(6.31), (6.32)

$$\frac{\partial}{\partial t}U_\varepsilon(t,s)+A(t)U_\varepsilon(t,s)$$

$$=S_{s-}(\varepsilon)R(t-\varepsilon,s)-R_1(t,s)-\int_s^{t-\varepsilon}R_1(t,\tau)R(\tau,s)d\tau. \tag{6.37}$$

让 $\varepsilon\to 0$ 取极限, (6.37) 的右端强收敛于零. 因为 $\frac{\partial}{\partial t}U_\varepsilon(t,s)\to\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)$ 是强的, 所以由(6.37), $A(t)U_\varepsilon(t,s)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时强收敛. 设 $x\in X$, $A(t)$ 的闭性连同 $U_\varepsilon(t,s)x\to U(t,s)x$ 一起推出 $U(t,s)x\in D$ 和 $A(t)U_\varepsilon(t,s)x\to A(t)U(t,s)x$. 因此当 $\varepsilon\to 0$ 时在(6.37)中取强极限得

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)+A(t)U(t,s)=0,\ \text{对于}\ t>s\ \text{成立}.$$

这就结束了(6.9)和(6.10)的证明.

为了证明(6.11)我们需要

引理 6.7 设 $\varphi(t,s)\geqslant 0$ 在 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 上是连续的. 如果存在正常数 A, B 和 α 使得

$$\varphi(t,s)\leqslant A+B\int_s^t(t-\sigma)^{\alpha-1}\varphi(\sigma,s)d\sigma,\ \text{对于}\ 0\leqslant s<t\leqslant T\text{成立}, \tag{6.38}$$

则存在常数 C 使得 $\varphi(t,s)\leqslant C$, 对于 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 成立.

证明 用恒等式(6.24)迭代(6.38) $n-1$ 次并用 T 估计 $t-s$ 我们得到

$$\varphi(t,s)\leqslant A\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{BT^\alpha}{\alpha}\right)^i+\frac{(B\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)}\int_s^t(t-\sigma)^{n\alpha-1}\varphi(\sigma,s)d\sigma.$$

选取 n 充分大使得 $n\alpha>1$ 和用 $T^{n\alpha-1}$ 估计 $(t-\sigma)^{n\alpha-1}$ 我们得到

$$\varphi(t,s)\leqslant C_1+C_2\int_s^t \varphi(\sigma,s)d\sigma.$$

由 **Gronwall** 不等式推出 $\varphi(t,s)\leqslant C_1e^{C_2(t-s)}\leqslant C_1e^{C_2T}\leqslant C$。因为 C_1 和 C_2 不依赖于 s，所以这个估计对 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 成立。

现在我们转到(6.11)的证明。设 $x\in X$ 并考虑函数 $\Psi(s)=S_t(t-s)U(s,\tau)A(\tau)^{-1}x$，对于 $0\leqslant\tau<s<t\leqslant T$。容易看出 Ψ 关于 s 是可微的和

$$\Psi'(s)=S_t(t-s)[A(t)-A(s)]U(s,\tau)A(\tau)^{-1}x.$$

从 τ 到 t 对 Ψ' 积分并作用 $A(t)$ 我们得到

$$Z(t,\tau)x=A(t)S_t(t-\tau)A(\tau)^{-1}x+\int_\tau^t Y(t,s)Z(s,\tau)ds, \tag{6.39}$$

这里

$$Y(t,s)=A(t)S_t(t-s)[A(t)-A(s)]A(s)^{-1}$$

和

$$Z(t,\tau)=A(t)U(t,\tau)A(\tau)^{-1}.$$

由(6.8)和(6.13)我们有

$$\begin{aligned}\|A(t)S_t(t-\tau)A(\tau)^{-1}\|&=\|S_t(t-\tau)A(t)A(\tau)^{-1}\|\\&\leqslant\|S_t(t-\tau)\|\cdot\|A(t)A(\tau)^{-1}\|\leqslant C_1.\end{aligned}$$

并由(6.8)和(6.14)

$$\begin{aligned}\|Y(t,s)\|&\leqslant\|A(t)S_t(t-s)\|\cdot\|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\|\\&\leqslant C_2(t-s)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

现在估计(6.39)，我们有

$$\|Z(t,\tau)x\|\leqslant C_1\|x\|+C_2\int_\tau^t(t-s)^{\alpha-1}\|Z(s,\tau)x\|ds$$

利用引理 6.7，由此推出 $\|Z(t,\tau)x\| \leqslant C\|x\|$。因此

$$\|Z(t,\tau)\| = \|A(t)U(t,\tau)A(\tau)^{-1}\| \leqslant C,$$

正如所期望的，这结束了 $(E_2)^+$ 的证明。

Ⅲ. **唯一性**

满足 $(E_1)'$，$(E_2)^+$ 和 $(E_3)^+$ 的发展系统的唯一性正如我们以下将看到的，它是 $(E_3)^+$ 的一个简单推论。

我们首先在对每一 $v \in D$，$A(t)v$ 在 $[0,T]$ 上是连续可微的补充假设下证明 $(E_3)^+$。这个假设直接推出 $\frac{\partial}{\partial t}A(t)A(0)^{-1} = A'(t)A(0)^{-1}$ 在 $[0,T]$ 上是一致有界的。它亦推出对每一 $\lambda \in \Sigma$，$R(\lambda;A(s))$ 关于 s 是可微的和

$$\frac{\partial}{\partial s}R(\lambda;A(s)) = R(\lambda;A(s))A'(s)R(\lambda;A(s)). \qquad (6.40)$$

由(6.7)和(6.40)我们推出

$$\left\|\frac{\partial}{\partial s}R(\lambda;A(s))\right\| \leqslant \frac{C}{|\lambda|+1}, \text{ 对于 } \lambda \in \Sigma \text{ 成立。} \qquad (6.41)$$

假设 (P_1) 和 (P_2) 推出（见 2.5 节）

$$S_s(t-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda(t-s)}R(\lambda;\ A(s))d\lambda,$$

这里 Γ 是 Σ 中连接 $\infty e^{-i\vartheta}$ 和 $\infty e^{i\vartheta}$ 的一条光滑路径。现在由我们的补充假设如果 $t-s>0$，则 $S_s(t-s)$ 关于 s 是强可微的和

$$\frac{\partial}{\partial s}S_s(t-s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda e^{-\lambda(t-s)}R(\lambda;A(s))d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial s}R(\lambda;A(s))d\lambda$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}S_s(t-s)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial s}R(\lambda;A(s))d\lambda.$$

为了证明 $(E_3)^+$ 我们构造一个算子值函数 $V(t,s)$ 满足

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial s}V(t,s)v=V(t,s)A(s)v, \text{ 对于 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, \ v\in D,\\ V(t,t)=I.\end{cases} \tag{6.42}$$

并在后面证明 $V(t,s)=U(t,s)$。$V(t,s)$ 的构造用类似于上述构造 $U(t,s)$ 的方式可得。我们命

$$Q_1(t,s)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\right)S_s(t-s)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial s}R(\lambda;A(s))d\lambda.$$

利用(6.41)和用类似于定理 1.7.7 的证明中的方式估计 $Q_1(t,s)$ 我们得到

$$\|Q_1(t,s)\|=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda(t-s)}\frac{\partial}{\partial s}R(\lambda;A(s))d\lambda\right\|\leqslant C.$$

其次我们用逐次逼近法解积分方程

$$Q(t,s)=Q_1(t,s)+\int_s^t Q(t,\tau)Q_1(\tau,s)d\tau. \tag{6.43}$$

这可用解积分方程(6.6)完全一样的方法得到。因为在这种情形 $Q_1(t,s)$是一致有界的，所以(6.43)的解 $Q(t,s)$ 满足

$$\|Q(t,s)\|\leqslant C.$$

令

$$V(t,s)=S_s(t-s)+\int_s^t Q(t,\tau)S_s(\tau-s)d\tau,$$

我们得到 $\|V(t,s)\|\leqslant C$ 和对 $v\in D$, $V(t,s)v$ 关于 s 是可微的。对 s 微分 $V(t,s)v$ 得

$$\frac{\partial}{\partial s}V(t,s)v-V(t,s)A(s)v$$

$$=Q_1(t,s)v+\int_s^t Q(t,\tau)Q(\tau,s)vd\tau-Q(t,s)v=0.$$

由 $V(t,s)$ 的定义知 $V(t,t)=I$，从而 $V(t,s)$ 是(6.42)的一个解。

对 $x\in X$ 和 $s<r<t$, 函数 $r\to V(t,r)U(r,s)x$关于 x 是可微的和

$$\frac{\partial}{\partial r}V(t,r)U(r,s)x$$

$$=V(t,r)A(r)U(r,s)x-V(t,r)A(r)U(r,s)x=0.$$

这表明对 $s<r<t$, $V(t,r)U(r,s)x$ 是不依赖于 r 的。让 $r\downarrow s$ 和 $r\uparrow t$ 我们对每一 $x\in X$ 得到 $V(t,s)x=U(t,s)x$. 因此 $U(t,s)=V(t,s)$ 和 $U(t,s)$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial s}U(t,s)v=U(t,s)A(s)v, \text{ 对于 } v\in D \text{ 成立,} \quad (6.44)$$

这就是所期望的。

我们继续在一般情形下证明(6.44)的正确性，即不假设以上所设的 $A(t)A(0)^{-1}$ 的连续性。为此我们用一个满足 $A_n(t)A_n(0)^{-1}$ 是连续可微的算子序列 $A_n(t)$ 来逼近 $A(t)$。

作法如下：设 $\rho(t)$ 是 R 上的一个连续可微的实值函数，满足对于 $|t|\geqslant 1, \rho(t)=0$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty}\rho(t)dt=1$。设 $\rho_n(t)=n\rho(nt)$ 和通过对 $t<0$ 定义 $A(t)=A(0)$ 及对 $t\geqslant\tau$ 定义 $A(t)=A(\tau)$ 而将 $A(t)$ 延拓到整个 R。设 $v\in D$ 和令

$$A_n(t)v=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t-\sigma)A(\sigma)vd\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(\sigma)A(t-\sigma)vd\sigma.$$

于是所定义的 $A_n(t)v$ 在 $[0,T]$ 上是连续可微的。现在我们证明 $A_n(t)$ 满足条件 (P_1)—(P_3)。

由定义我们有 $D(A_n(t))=D$，因此 (P_1) 被满足，对 $\lambda\in\Sigma$ 我们有

$$x-(\lambda-A_n(t))R(\lambda;A(t))x=-(A(t)-A_n(t))R(\lambda;A(t))x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t-\tau)(A(\tau)-A(t))R(\lambda;A(t))xd\tau.$$

对 $|t-\tau|\leqslant 1/n$，(6.7)和(6.8)推出

$$\|(A(t)-A(\tau))R(\lambda;A(t))\|\leqslant Cn^{-\alpha}.$$

因此

$$\|x-(\lambda-A_n(t))R(\lambda;A(t))x\|\leqslant Cn^{-\alpha}\|x\|, \qquad (6.45)$$

并且特别地取 $\lambda=0$ 我们有

$$\|(A(t)-A_n(t))A(t)^{-1}\|\leqslant Cn^{-\alpha}. \qquad (6.46)$$

对 $v\in D$，由(6.45)我们容易得到

$$(1-Cn^{-\alpha})\|(\lambda-A(t))v\|\leqslant\|(\lambda-A_n(t))v\|$$
$$\leqslant(1+Cn^{-\alpha})\|(\lambda-A(t))v\|, \qquad (6.47)$$

因此如果 n 充分大使得 $Cn^{-\alpha}<1$ 和 $\lambda\in\Sigma$，则 $\lambda I-A_n(t)$ 是闭的，$R(\lambda I-A_n(t))=X$，并且 $\lambda I-A_n(t)$ 有有界逆 $R(\lambda;A_n(t))$ 满足

$$\|R(\lambda;A_n(t))\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|+1}，\text{对于 }\lambda\in\Sigma\text{ 成立。}$$

因此 (P_2) 被满足。

在(6.46)中选取 n 使得 $Cn^{-\alpha}<1$ 我们得到

$$A(t)A_n(t)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}[I-A_n(t)A(t)^{-1}]^k$$

和 $\|A(t)A_n(t)^{-1}\|\leqslant C$。由 $A_n(t)$ 的定义和(6.8)推出。

$$\begin{aligned}&\|(A_n(t)-A_n(s))A(\tau)^{-1}v\|\\ \leqslant&\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(\tau)\|(A(t-\sigma)-A(s-\sigma))A(\tau)^{-1}v\|d\tau\\ \leqslant&C|t-s|^{\alpha}\|v\|,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\|(A_n(t)-A_n(s))A_n(\tau)^{-1}\|\\ \leqslant&\|(A_n(t)-A_n(s))A(\tau)^{-1}\|\cdot\|A(\tau)A_n(\tau)^{-1}\|\leqslant C|t-s|^{\alpha},\end{aligned}$$

从而 (P_3) 亦被 $A_n(t)$ 满足。

由证明的第一部分推出存在一个算子值函数 $U_n(t,s)$ 满足 $\|U_n(t,s)\|\leqslant C$，这里 C 不依赖于 n，和

$$\frac{\partial}{\partial t}U_n(t,s)=A_n(t)U_n(t,s)，\text{对于 }0\leqslant s<t\leqslant T\text{ 成立。}$$

因为 $A_n(t)v$ 对于 $v\in D$ 关于 t 是连续可微的，所以

$$\frac{\partial}{\partial s}U_n(t,s)v=U_n(t,s)A_n(s)v，\text{对于 }v\in D\text{ 成立。}\tag{6.48}$$

由(6.48)和 $U(t,s)$ 的性质，对每一 $v\in D$，函数 $r\to U_n(t,r)U(r,s)v$ 是可微的和

$$U(t,s)v - U_n(t,s)v = \int_s^t \frac{\partial}{\partial r}\{U_n(t,r)U(r,s)v\}dr$$

$$= \int_s^t U_n(t,r)[A_n(r) - A(r)]U(r,s)vdr$$

$$= \int_s^t U_n(t,r)[A_n(r) - A(r)]A(r)^{-1}A(r)U(r,s)A(s)^{-1}A(s)$$

$$\cdot vds. \tag{6.49}$$

利用(6.46)和(6.11)估计(6.49)我们得到

$$\|U(t,s)v - U_n(t,s)v\| \leqslant Cn^{-\alpha}(t-s)\|A(s)v\|$$

$$\leqslant Cn^{-\alpha}\|A(0)v\|,$$

因此 $U_n(t,s)v \to U(t,s)v$ 关于 t 和 s 是一致的。因为 D 在 X 中稠密，所以对每一 $x \in X$，$U_n(t,s)x \to U(t,s)x$ 关于 t 和 s 是一致的。对 $v \in D$ 我们有

$$\|U_n(t,s)A_n(s)v - U(t,s)A(s)v\|$$

$$\leqslant \|U_n(t,s)(A_n(s)v - A(t)v)\| + \|(U_n(t,s) - U(t,s))A(s)v\|$$

$$\leqslant Cn^{-\alpha}\|A(0)v\| + \|(U_n(t,s) - U(t,s))A(s)v\|$$

因此 $U_n(t,s)A_n(s)v \to U(t,s)A(s)v$ 关于 t 和 s 是一致的，对于 $r < s < t$ 和 $v \in D$ 我们有

$$U_n(t,s)v - U_n(t,r)v = \int_r^s \frac{\partial}{\partial \sigma}U_n(t,\sigma)vd\sigma$$

$$= \int_r^s U_n(t,\sigma)A_n(\sigma)vd\sigma.$$

让 $n \to \infty$ 得

$$U(t,s)v - U(t,r)v = \int_r^s U(t,\sigma)A(\sigma)vd\sigma,$$

因此(6.44)在一般情况下成立。这结束了 $(E_3)^+$ 的证明。

为了结束定理 6.1 的证明我们还必需证明 $U(t,s)$ 的唯一 性和它满足 $U(t,s)=U(t,r)U(r,s)$ 对于 $0\leqslant s\leqslant r\leqslant t\leqslant T$ 成 立.这两个论述由以下定理得到:

定理 6.8 设 $A(t)$ 对 于 $0\leqslant t\leqslant T$ 满足条件 (P_1)—(P_3).则对每一 $0\leqslant s<T$ 和 $x\in X$, 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=0, & s<t\leqslant T, \\ u(s)=x, \end{cases} \tag{6.50}$$

有唯一的解 $u(t)=U(t,s)x$, 这里 $U(t,s)$ 是上述构造的发展系统.

证明 由(6.9)立即推出 $u(t)=U(t,s)x$ 是 (6.50) 的一个解. 为了证明其唯一性设 $v(t)$ 是 (6.50) 的一个解. 因为对每一$r>s$, $v(r)\in D$, 所 以 由 (6.12) 和 (6.50) 知 函 数 $r\to U(t,r)v(r)$ 是可微的和

$$\frac{\partial}{\partial r}U(t,r)v(r)=U(t,r)A(r)v(r)-U(t,r)A(r)v(r)=0.$$

因此 $U(t,r)v(r)$ 在 $0<r<t$ 上取常值. 因为它 亦在 $s\leqslant r\leqslant t$ 上连续, 所以我们能 让 $r\to t$ 和 $r\to s$ 得 到 $U(t,s)x=v(t)$, 并由此推出(6.50)的解的唯一性.

对 $x\in X$, 由定理 6.8 易得

$U(t,s)x=U(t,r)U(r,s)x$, 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 成立.

因此 $U(t,s)$ 是一个满足 $(E_1)'$, $(E_2)^+$ 和 $(E_3)^+$ 的发 展 系 统. 如果 $V(t,s)$ 是一个满足 $(E_1)'$ 和 $(E_2)^+$ 的发展系统, 则 $V(t,s)x$ 是(6.50)的一个解, 并由定理 6.8 推 出 $V(t,s)x=U(t,s)x$, 从而 $V(t,s)=U(t,s)$ 和 $U(t,s)$ 是满足 $(E_1)'$,

和$(E_3)^+$的唯一的发展系统。这结束了定理 6.1 的证明。

在定理 6.1 中我们证明了 $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=A(t)U(t,s)$ 在 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 上是强连续的。事实上我们有更强的结果成立。

定理 6.9 设定理 6.1 的假设成立，则对每一 $\varepsilon>0$，映象 $t\to A(t)U(t,s)$ 对 $0<s+\varepsilon\leqslant t\leqslant T$ 是依一致算子拓扑 Hölder 连续的，其中指数 $\beta<\alpha$。

证明 让我们回忆一下

$$U(t,s)=S_s(t-s)+W(t,s).$$

因为对 $t\in[s+\varepsilon,T]$，$\frac{\partial}{\partial t}S_s(t-s)=A(s)S_s(t-s)$关于 t 是 Lipschitz连续的，所以剩下只须证明$\frac{\partial}{\partial t}W(t,s)$ 是 Hölder 连续的。对固定的 $\varepsilon>0$，假设 $0\leqslant s<s+\varepsilon\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$，由(6.35)我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W(t,s)}{\partial t}-\frac{\partial W(\tau,s)}{\partial t}\\
&=[S_t(t-s)R(t,s)-S_\tau(\tau-s)R(\tau,s)]\\
&\quad+\int_\tau^t(A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma))R(\sigma,s)d\sigma\\
&\quad+\int_s^\tau(A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)-A(\tau)S_\tau(\tau-\sigma)\\
&\quad+A(\sigma)S_\sigma(\tau-\sigma))R(\sigma,s)d\sigma\\
&\quad+\int_\tau^t A(t)S_t(t-\sigma)(R(t,s)-R(\sigma,s))d\sigma
\end{aligned}$$

$$+\int_s^\tau [A(t)S_t(t-\sigma)(R(t,s)-R(\sigma,s))$$

$$-A(\tau)S_\tau(\tau-\sigma)(R(\tau,s)-R(\sigma,s))]d\sigma$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

现在我们将分别估计每一项 I_j，$1\leqslant j\leqslant 5$。在这些估计中出现的常数通常依赖于如上选取的 $\varepsilon>0$。

$$\|I_1\|\leqslant\|(S_t(t-s)-S_t(\tau-s))R(t,s)\|$$

$$+\|(S_t(\tau-s)-S_\tau(\tau-s))R(t,s)\|$$

$$+\|S_\tau(\tau-s)(R(t,s)-R(\tau,s))\|$$

$$\leqslant C_1(t-\tau)+C_2(t-\tau)^\alpha+C_3(t-\tau)^\alpha\leqslant C(t-\tau)^\alpha,$$

这里我们利用了 $S_t(s)$ 对于 $s>0$ 的 **Lipschitz** 连续性，(6.18)和具有 $\alpha=\beta$ 的推论 6.5。第二项的估计如下。

$$\|I_2\|\leqslant\int_\tau^t\|(A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma))R(\sigma,s)\|d\sigma$$

$$\leqslant C\int_\tau^t(t-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-s)^{\alpha-1}d\sigma$$

$$\leqslant C\int_\tau^t(t-\sigma)^{\alpha-1}d\sigma\leqslant C(t-\tau)^\alpha,$$

这里我们利用了(6.26)和

$$\|A(t)S_t(t-\sigma)-A(\tau)S_\tau(t-\sigma)\|\leqslant C(t-\tau)^\alpha(t-\sigma)^{-1},\tag{6.51}$$

这是(6.16)和(6.18)的的一个简单推论。

为了估计 I_3 首先我们注意由(6.18)和(6.14)我们有

$$\|A(\sigma)S_\sigma(\rho)-A(\tau)S_\tau(\rho)\|\leqslant\frac{C}{\rho}(\tau-\sigma)^\alpha,$$

因此

$$\|A(\sigma)^2S_\sigma(\rho)-A(\tau)^2S_\tau(\rho)\|$$

$$\leq \left\| A(\sigma)S_{\sigma}\left(\frac{\rho}{2}\right)\left(A(\sigma)S_{\sigma}\left(\frac{\rho}{2}\right)-A(\tau)S_{\tau}\left(\frac{\rho}{2}\right)\right)\right\|$$

$$+\left\|\left(A(\sigma)S_{\sigma}\left(\frac{\rho}{2}\right)-A(\tau)S_{\tau}\left(\frac{\rho}{2}\right)\right)A(\tau)S_{\tau}\left(\frac{\rho}{2}\right)\right\|$$

$$\leq \frac{C}{\rho^2}(\tau-\sigma)^{\alpha}. \tag{6.52}$$

我们改写 I_3 的被积函数为

$$[A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_{\sigma}(t-\sigma)-A(\tau)S_{\tau}(\tau-\sigma)$$
$$+A(\sigma)S_{\sigma}(\tau-\sigma)]R(\sigma,s)$$
$$=[A(\sigma)(S_{\sigma}(\tau-\sigma)-S_{\sigma}(t-\sigma))-A(\tau)(S_{\tau}(\tau-\sigma)-S_{\tau}(t-\sigma))$$
$$+A(t)S_t(t-\sigma)-A(\tau)S_{\tau}(t-\sigma)]R(\sigma,s)$$
$$=\left[\int_{\tau-\sigma}^{t-\sigma}(A(\sigma)^2S_{\sigma}(\rho)-A(\tau)^2S_{\tau}(\rho))d\rho+A(t)S_t(t-\sigma)\right.$$
$$\left.-A(\tau)S_{\tau}(t-\sigma)\right]R(\sigma,s).$$

利用 (6.52), (6.51) 和 (6.26) 估计这个被积函数，对于 $0<\beta<\alpha$，我们得到

$$\|I_3\|\leq C\int_s^{\tau}[(t-\tau)(\tau-\sigma)^{\alpha-1}(t-\sigma)^{-1}$$
$$+(t-\tau)^{\alpha}(t-\sigma)^{-1}](\sigma-s)^{\alpha-1}d\sigma$$
$$\leq C(t-\tau)^{\beta}\int_s^{\tau}(\tau-\sigma)^{(\alpha-\beta)-1}(\sigma-s)^{\alpha-1}d\sigma\leq C(t-\tau)^{\beta},$$

这里我们利用了 $t-\tau\leq t-\sigma$ 和 $t-\sigma\geq\tau-\sigma$。因此，例如，

$$(t-\tau)(\tau-\sigma)^{\alpha-1}(t-\sigma)^{-1}=(t-\tau)^{\beta}\left(\frac{t-\tau}{t-\sigma}\right)^{1-\beta}.$$

$$(t-\sigma)^{-\beta}(\tau-\sigma)^{\alpha-1}\leq(t-\tau)^{\beta}(\tau-\sigma)^{\alpha-\beta-1}.$$

对 I_4 我们有

$$\|I_4\| \leqslant \int_\tau^t \|A(t)S_t(t-\sigma)\| \cdot \|R(t,s)-R(\sigma,s)\| d\sigma$$

$$\leqslant C\int_\tau^t (t-\sigma)^{-1}(t-\sigma)^{\alpha}(\sigma-s)^{-1}d\sigma$$

$$\leqslant C\int_\tau^t (t-\sigma)^{\alpha-1}d\sigma \leqslant C(t-\tau)^{\alpha}$$

这里我们利用了(6.14)和推论 6.5 。最后为了估计 I_5 我 们改写其被积函数为

$$\begin{aligned}
&[A(t)S_t(t-\sigma)(R(t,s)-R(\sigma,s)) \\
&\quad -A(\tau)S_\tau(\tau-\sigma)(R(\tau,s)-R(\sigma,s))] \\
&=A(t)S(t-\sigma)(R(t,s)-R(\tau,s)) \\
&\quad +[A(t)S_t(t-\sigma)-A(\tau)S_\tau(t-\sigma) \\
&\quad +A(\tau)(S_\tau(t-\sigma)-S_\tau(\tau-\sigma))](R(\tau,s)-R(\sigma,s))
\end{aligned}$$

取 $\beta<\gamma<\alpha$ 并利用推论 6.5，(6.14)，(6.51)和(6.17)估计 I_5 的被积函数我们得到

$$\begin{aligned}
\|I_5\| &\leqslant C\int_s^\tau (t-\sigma)^{-1}\{(t-\tau)^{\gamma}(\tau-s)^{\alpha-\beta-1} \\
&\quad +[(t-\tau)^{\gamma}+(\tau-\sigma)^{-1}(t-\tau)](\tau-\sigma)^{\gamma}(\sigma-s)^{\alpha-\beta-1}\}d\sigma \\
&\leqslant C(t-\tau)^{\gamma}+C(t-\tau)^{\gamma}\int_s^\tau (\tau-\sigma)^{\alpha-1}(\sigma-s)^{(\alpha-\beta)-1}d\sigma \\
&\quad +C(t-\tau)^{\beta}\int_s^\tau (\tau-\sigma)^{(\gamma-\beta)-1}(\sigma-s)^{(\alpha-\beta)-1}d\sigma \\
&\leqslant C(t-\tau)^{\beta}.
\end{aligned}$$

证毕。

§5.7 抛物型非齐次方程

设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足前一节的条件 (P_1)—(P_3)。在 Banach 空间 X 中研究非齐次初值问题。

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=f(t), \quad 0\leqslant s<t\leqslant T, \\ u(s)=x \quad . \end{cases} \tag{7.1}$$

由定理 6.1，存在相应于族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的唯的一发展系统 $U(t,s)$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$。正如我们在自治的和双曲情形中所做的那样，连续函数

$$u(t)=U(t,s)x+\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma, \tag{7.2}$$

其中 $f\in L^1(s,T;X)$ 和 $x\in X$，称为初值问题(7.1)的 mild 解。因此对每一 $f\in L^1(s,T:X)$ 和 $x\in X$ 初值问题(7.1)具有由(7.2)给出的唯一的 mild 解。在本节我们感兴趣的是(7.1)的古典解，即这样的一个函数 u：$[s,T]\to X$，它对 $s\leqslant t\leqslant T$ 是连续的，对 $s<t\leqslant T$ 是连续可微的和 $u(t)\in D$，$u(s)=x$ 及 $u'(t)+A(t)u(t)=f(t)$ 对 $s<t\leqslant T$ 成立。我们称函数 u 是初值问题(7.1)的一个解，如果它是这个问题的一个古典解。为了得到(7.1)的（古典）解我们必须进一步加强对函数 f 的条件。这里的情况完全同自治的情况，即 $-A$ 是一个解析半群的无穷小生成元（见推论 4.3.3）的情况类似。

定理 7.1 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足 5.6 节中的条件 (P_1)—(P_3)。又设 $U(t,s)$ 是由定理 6.1 提供的发展系统。如果 f

在 $[s,T]$ 上是 Hölder 连续的，则对每一 $x\in X$，初值问题(7.1)有唯一的解 u 如下

$$u(t)=U(t,s)x+\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

证明 由定理 6.8，$U(t,s)x$ 是齐次初值问题

$$\frac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=0,\quad u(s)=x \tag{7.3}$$

的唯一的解。因此为了证明初值问题(7.1)的解的存在性，只须证明

$$v(t)=\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dv(t)}{dt}+A(t)v(t)=f(t),\\ v(s)=0\end{cases} \tag{7.4}$$

的一个解。为此我们命

$$v_\varepsilon(t)=\int_s^{t-\varepsilon} U(t,\sigma)f(\sigma)ds. \tag{7.5}$$

由定理 6.1，$v_\varepsilon(t)$ 关于 t 是可微的和

$$\frac{\partial}{\partial t}v_\varepsilon(t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_s^{t-\varepsilon} U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

$$=U(t,t-\varepsilon)f(t-\varepsilon)-\int_s^{t-\varepsilon} A(t)U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma,$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial t}v_\varepsilon(t)+A(t)v_\varepsilon(t)=U(t,t-\varepsilon)f(t-\varepsilon). \tag{7.6}$$

在(7.6)中让 $\varepsilon\downarrow 0$ 将结束证明。为了验证这个极限过程，我们首先指出当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$\frac{\partial}{\partial t}v_\varepsilon(t)$ 有极限。

由第 6 节的结果我们有

$$U(t,s)=S_s(t-s)+W(t,s), \tag{7.7}$$

这里 $S_t(s)$ 是由 $-A(t)$ 生成的解析半群，$W(t,s)$ 对 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 关于 t 是强连续可微的（见定理 6.1 的证明）和

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^{t-\varepsilon}W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma=W(t,t-\varepsilon)f(t-\varepsilon)$$

$$+\int_s^{t-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

此外，$W(t,t)=0$ 和 $\left\|\frac{\partial W(t,s)}{\partial t}\right\|\leqslant C(t-s)^{\alpha-1}$(见(6.36))．

因此

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\partial}{\partial t}\int_s^{t-\varepsilon}W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma=\int_s^t\frac{\partial}{\partial t}W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

其次，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^{t-\varepsilon}S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

$$=S_{t-\varepsilon}(\varepsilon)f(t-\varepsilon)+\int_s^{t-\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

$$=S_{t-\varepsilon}(\varepsilon)f(t-\varepsilon)+\int_s^{t-\varepsilon}[A(t)S_t(t-\sigma)$$

$$-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)]f(\sigma)d\sigma-\int_s^{t-\varepsilon}A(t)S_t(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma. \tag{7.8}$$

为了证明当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时极限的存在性，我们分别处理(7.8)的右端的三项。

由引理 6.6

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} S_{t-\varepsilon}(\varepsilon)f(t-\varepsilon)=f(t).$$

假设 (P_1)—(P_3) 推出（见引理 6.2）

$$\|A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)\|\leqslant C(t-\sigma)^{\alpha-1}.$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_s^{t-\varepsilon}[A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)]f(\sigma)d\sigma$$

$$=\int_s^t[A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)]f(\sigma)d\sigma.$$

最后对于最后的项我们有

$$\int_s^{t-\varepsilon}A(t)S_t(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

$$=\int_s^{t-\varepsilon}A(t)S_t(t-\sigma)(f(\sigma)-f(t))d\sigma+\int_s^{t-\varepsilon}A(t)S_t(t-\sigma)f(t)d\sigma$$

$$=\int_s^{t-\varepsilon}A(t)S_t(t-\sigma)(f(\sigma)-f(t))d\sigma-[S_t(t-s)-S_t(\varepsilon)]f(t).\tag{7.9}$$

f 的 Hölder 连续性和估计 $\|A(t)S_t(t-\sigma)\|\leqslant C(t-\sigma)^{-1}$ 推出(7.9)的右端的第一项中的被积函数是可积的。因此

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_s^{t-\varepsilon}A(t)S_t(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

$$=\int_s^t A(t)S_t(t-\sigma)(f(\sigma)-f(t))d\sigma-S_t(t-s)f(t)+f(t).$$

综合上面这些结果我们证明了当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^{t-\varepsilon}S_\sigma(t-\sigma)$

$f(\sigma)d\sigma$ 收敛。并且因为我们已经看到当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^{t-\varepsilon}$

$W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma$ 收敛，所以 $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\partial}{\partial t}v_\varepsilon(t)$ 存在。回顾我们的证明不难看到对每一 $\varepsilon>0$，这个极限在 $[s+\varepsilon,T]$ 上是一致的。

回到(7.6)现在我们能得到当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$A(t)v_\varepsilon(t)$ 收敛。因为由(7.5)，当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时 $v_\varepsilon(t)\to v(t)$，所以从 $A(t)$ 的闭性知 $v(t)\in D(A(t))=D$ 和 $A(t)v_\varepsilon(t)\to A(t)v(t)$ 对于 $s<t\leqslant T$ 成立。从 t 到 $t+h$ 对(7.6)积分我们有

$$v_\varepsilon(t+h)-v_\varepsilon(t)=-\int_t^{t+h}A(\tau)v_\varepsilon(\tau)d\tau$$

$$+\int_s^{t+h}U(\tau,\tau-\varepsilon)f(\tau-\varepsilon)d\tau\,. \tag{7.10}$$

让 $\varepsilon\downarrow 0$ 取极限得

$$v(t+h)-v(t)=-\int_t^{t+h}A(\tau)v(\tau)d\tau+\int_t^{t+h}f(\tau)d\tau. \tag{7.11}$$

最后用 h 除以(7.11)，并让 $h\downarrow 0$ 我们得到 $v(t)$ 满足(7.4)。初值问题(7.1)的解的唯一性是定理 6.8 中所证明的齐次初值问题(7.3)的解的唯一性的一个直接推论。这就结束了定理 7.1 的证明。

注 7.2 设 f 满足

$$\|f(t)-f(\tau)\|\leqslant L|t-\tau|^\theta,\quad 0<\theta<1,\quad \tau,t\in[0,T].$$

能够证明如果 u 是初值问题 (7.1) 的解，则 $u'(t)$ 对每一 $\varepsilon>0$ 在 $[s+\varepsilon,T]$ 上是 Hölder 连续的，其指数 $\beta<\min(\alpha,\theta)$。

此外如果 $f(s)=0$ 和 $x=0$，则 u' 在 $[s,T]$ 上是 Hölder 连续的，其指数为 β.

注 7.2 的证明是冗长乏味的，我们不打算在此给出。作为替换，现在我们将指出怎样用定理 7.1 以便在较强的假设下得到 (7.1) 的解的高阶可微性。一个这类典型的结果是

定理 7.3 设 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 满足条件 (P_1)，(P_2) 和假设 $t\to A(t)A(0)^{-1}$ 是可微的，其导数 $A'(t)A(0)^{-1}$ 满足 Hölder 条件

$$\|A'(t)A(0)^{-1}-A'(\tau)A(0)^{-1}\|\leqslant C|t-\tau|^{\alpha},$$

对于 $\tau,t\in[0,T]$，$0<\alpha\leqslant 1$。

设 $f(t)$ 在 $[0,T]$ 上是可微的，其导数 f' 在 $[0,T]$ 上是 Hölder 连续的，即

$$\|f'(t)-f'(\tau)\|\leqslant C|t-\tau|^{\beta}, \quad 对于 \tau,t\in[0,T], \quad 0<\beta\leqslant 1.$$

如果 u 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=f(t), & 0<t\leqslant T,\\ u(0)=x\end{cases} \tag{7.12}$$

的一个解，则 u 在 $(0,T]$ 上是二次连续可微的。

证明 设 u 是(7.12)的解，命

$$u_h(t)=\frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \quad f_h(t)=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

则

$$\frac{du_h(t)}{dt}+A(t)u_h(t)=f_h(t)-\frac{A(t+h)-A(t)}{h}u(t+h). \tag{7.13}$$

(7.13)的右端显然对 t 是 Hölder 连续的，因此对 $\tau>0$，由定理 7.1 我们有

$$u_h(t)=U(t,\tau)u_h(\tau)$$
$$+\int_\tau^t U(t,\sigma)\left[f_h(\sigma)-\frac{A(\sigma+h)-A(\sigma)}{h}u(\sigma+h)\right]d\sigma. \tag{7.14}$$

我们对 $f(t)$ 的假设推出当 $h\to 0$ 时，$f_h(t)\to f'(t)$ 在 $[0,T]$ 上是一致的。由 $A(t)A(0)^{-1}$ 的可微性，$A(0)A(t)^{-1}$ 的强连续性和 $A(t)u(t)$ 对 $t>0$ 的连续性得

$$\frac{A(\sigma+h)-A(\sigma)}{h}u(\sigma+h)$$

$$=\frac{A(\sigma+h)-A(\sigma)}{h}A(0)^{-1}A(0)A(\sigma+h)^{-1}A(\sigma+h)u(\sigma+h).$$

当 $h\to 0$ 时，在 $[\tau,T]$ 上一致收敛于 $A'(\sigma)A(0)^{-1}A(0)u(\sigma)$。因此在(7.14)中我们能让 $h\to 0$，并且得到

$$u'(t)=U(t,\tau)u'(\tau)$$
$$+\int_\tau^t U(t,\sigma)[f'(\sigma)-A'(\sigma)A(0)^{-1}A(0)u(\sigma)]d\sigma.$$

由我们的假设和 u 在 $[\tau,T]$ 上是 C^1 类的事实知 $g(\sigma)=f'(\sigma)-A'(\sigma)A(0)^{-1}A(0)u(\sigma)$ 在 $[\tau,T]$ 上满足一个 Hölder 条件，因此由定理 7.1，$u'(t)$ 在 $(\tau,t]$ 上是连续可微的和满足方程

$$\frac{dv(t)}{dt}+A(t)v(t)=f'(t)-A'(t)A(0)^{-1}A(0)u(t),$$

$$\text{对于 } \tau<t\leqslant T \text{ 成立。} \tag{7.15}$$

因为 $\tau>0$ 是任意的，所以如所要求的 $u'(t)$ 在 $(0,T]$ 上是

连续可微的。

注 7.4 如果在上述定理中我们假设 $A(t)A(0)^{-1}$ 是 k 次连续可微的和其 k 阶导数是 Hölder 连续的。如果我们亦假设 f 是 k 次连续可微的和其 k 阶导数是 Hölder 连续的，则我们能象证明定理 7.3 一样证明 u 在 $(0,T]$ 上是 $k+1$ 阶连续可微的。特别地，如果 $A(t)A(0)^{-1}$ 和 $f(t)$ 在 $[0,T]$ 上是 C^∞ 函数，则 u 在 $(0,T]$ 上是 C^∞ 的。

§5.8 抛物型发展方程解的渐近性态

设 $A(t)$，$t\geqslant 0$ 是 Banach 空间 X 中的算子族，对每一 $T>0$ 满足 §5 节的假设 (P_1)—(P_3)。如果 f: $[0,\infty)\to X$ 在 $[0,\infty)$ 上是 Hölder 连续的，则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=f(t), & t>0\\ u(0)=x\end{cases} \tag{8.1}$$

在 $[0,\infty)$ 上有唯一的解 u。当 $t\to\infty$ 时这个解的渐近性态将是本节的课题。为了研究这种渐近性态我们将假设条件 (P_1)—(P_3) 在 $[0,\infty)$ 上一致成立，即对每一 $T>0$，它们对于不依赖于 T 的常数 M，L 和 α 成立。我们进一步假设

(P_4) 算子 $A(t)A(s)^{-1}$ 对 $0\leqslant s$, $t<\infty$ 是一致有界的和存在一个闭算子 $A(\infty)$，其定义域为 D，使得

$$\lim_{t\to\infty}\|(A(t)-A(\infty))A(0)^{-1}\|=0. \tag{8.2}$$

在这些假设下齐次发展方程的解指数衰减到零，这由以

下定理推出。

定理 8.1 设 $\{A(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 $[0,\infty)$ 上一致地满足条件 (P_1)—(P_3)。如果 $\{A(t)\}_{t\geqslant 0}$ 亦满足 (P_4) 和 $U(t,s)$ 是相应于 $\{A(t)\}$ 的发展系统（见定理 6.1），则存在常数 $C>0$ 和 $\theta>0$ 使得

$$\|U(t,s)\|\leqslant C\,e^{-\theta(t-s)}, \text{ 对于 } 0\leqslant s\leqslant t \text{ 成立。} \tag{8.3}$$

证明 首先我们注意由 2.5 节的结果，D 的稠密性和 (P_2) 对所有 $t\geqslant 0$ 成立的事实知 $-A(t)$ 对每一 $t\geqslant 0$ 是一个解析半群 $S_t(s)$，$s\geqslant 0$ 的无穷小生成元，且存在常数 $C\geqslant 0$ 和 $\delta>0$（不依赖于 t）使得

$$\|S_t(s)\|\leqslant C\,e^{-\delta s}, \text{ 对于 } s\geqslant 0 \text{ 成立，} \tag{8.4}$$

$$\|A(t)S_t(s)\|\leqslant \frac{C}{S}e^{-\delta s}, \text{ 对于 } s>0 \text{ 成立。} \tag{8.5}$$

命

$$\rho(\mu)=\sup\{\|(A(t)-A(s))A(r)^{-1}\|;\ 0\leqslant\mu\leqslant s,\ t<\infty,\ 0\leqslant r<\infty\}。 \tag{8.6}$$

由 (P_3) 和 (P_4)，对 $\mu\geqslant 0$，$\rho(\mu)$ 是有限的和当 $\mu\to\infty$ 时 $\rho(\mu)\to 0$。联合(8.6)和假设 (P_3) 我们得到

$$\|(A(t)-A(s))A(r)^{-1}\|\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}\,|t-s|^{\alpha/2}, \text{ 对于 } \mu\leqslant s,t \text{ 成立，} \tag{8.7}$$

这里和整个证明的其余部分 C 将表示一个通用的常数。由(8.7)我们推出

$$\begin{aligned}\|R_1(t,s)\|&=\|(A(s)-A(t))S_s(t-s)\|\\&\leqslant\|(A(s)-A(t))A(s)^{-1}\|\cdot\|A(s)S_s(t-s)\|\\&\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}\,(t-s)^{\alpha/2-1}e^{-\delta(t-s)}, \text{ 对于 } \mu\leqslant s\leqslant t \text{ 成立。}\end{aligned} \tag{8.8}$$

对 m 用归纳法容易得

$$\|R_m(t,s)\| = \left\|\int_s^t R_1(t,\tau)R_{m-1}(\tau,s)\,d\tau\right\|$$

$$\leqslant \frac{e^{-\delta(t-s)}}{t-s} \cdot \frac{\left(C\sqrt{\rho(\mu)}\,(t-s)^{\alpha/2}\right)^m}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{2}\right)} \tag{8.9}$$

因为对 $0<\beta\leqslant 1$ 存在一个常数 C_β 使得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{\Gamma(m\beta)} \leqslant C_\beta x e^{2x^{1/\beta}}, \quad \text{对于 } x\geqslant 0 \text{ 成立,}$$

所以对 $\mu\leqslant s\leqslant t$ 我们有

$$\|R(t,s)\| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \|R_m(t,s)\|$$

$$\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}\,(t-s)^{\alpha/2-1}\exp\{-(\delta - C\rho(\mu)^{1/\alpha})(t-s)\},$$

因此对每一 $0<\theta'<\delta$，存在 $\mu_0>0$ 使得对 $t\geqslant s\geqslant \mu\geqslant \mu_0$

$$\|R(t,s)\| \leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}\,(t-s)^{\alpha/2-1}\exp\{-\theta'(t-s)\}. \tag{8.10}$$

最后固定 θ，$\theta<\theta'<\delta$，我们有

$$\|U(t,s)\| \leqslant \|S_s(t-s)\| + \int_s^t \|S_\tau(t-\tau)\| \circ \|R(\tau,s)\|\,d\tau$$

$$\leqslant Ce^{-\delta(t-s)} + C\sqrt{\rho(\mu)}\,e^{-\theta'(t-s)}(t-s)^{\alpha/2}$$

$$\leqslant Ce^{-\theta(t-s)}, \quad \text{对于 } t\geqslant s\geqslant \mu\geqslant \mu_0 \text{ 成立。} \tag{8.11}$$

如果需要，通过修改常数不等式(8.11)将对所有 $t\geqslant s\geqslant 0$ 成立。证毕。

现在我们转向非齐次初值问题(8.1)，并作下面的补充假设

(F) 函数 f：$[0,\infty)\to X$ 在 $[0,\infty)$ 上满足一个一致的

Hölder 条件，即存在常数 $C\geqslant 0$ 和 $0<\gamma\leqslant 1$ 使得

$$\|f(t)-f(s)\|\leqslant C|t-s|^{\gamma}，\text{对于 } 0\leqslant s,t<\infty \text{ 成立}$$

和存在一个元素 $f(\infty)\in X$ 使得

$$\lim_{t\to\infty}\|f(t)-f(\infty)\|=0. \tag{8.12}$$

现在我们有

定理 8.2 设 $\{A(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在 $[0,\infty)$ 上一致地满足 (P_1)—(P_3)。又设 $\{A(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足 (P_4) 和 f 满足 (F)。如果 u 是初值问题 (8.1) 的解，则存在一个不依赖于 $x\in X$ 的元素 $u(\infty)\in X$，使得

$$\lim_{t\to\infty}u(t)=u(\infty), \tag{8.13}$$

$$u(\infty)\in D,\quad A(\infty)u(\infty)=f(\infty) \tag{8.14}$$

和

$$\lim_{t\to\infty}u'(t)=0. \tag{8.15}$$

证明 首先我们证明如果 $f(\infty)=0$，则当 $t\to\infty$ 时 $u(t)\to 0$。由定理 7.1 知

$$u(t)=U(t,0)x+\int_0^{\infty}U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

因为由定理 8.1 对某 $\theta>0$，$\|U(t,0)\|\leqslant Ce^{-\theta t}\|x\|$，所以只须证明当 $t\to\infty$ 时，$\int_0^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma\to 0$。设 $\|U(t,s)\|\leqslant Ce^{-\theta(t-s)}$ 和 $\|f\|_{\infty}=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|f(t)\|$。给定 $\varepsilon>0$，选取 $T>0$ 使得对 $\sigma\geqslant T$，$\|f(\sigma)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\theta}{C}$ 和选取 $T_1>T$ 使得对 $t\geqslant T_1$，$e^{-\theta(t-T)}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\theta}{C}(\|f\|_{\infty}+1)^{-1}$。于是对 $t>T_1$，

$$\left\|\int_0^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma\right\| \leqslant \left\|\int_0^T U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma\right\| + \left\|\int_T^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma\right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

因此当 $t \to \infty$ 时，$u(t) \to 0$ 。

其次我们证明假设 (P_1)—(P_4) 推出 $A(\infty)$ 是可逆的。事实上，由 (P_4) 得

$$\|I - A(\infty)A(t)^{-1}\| \leqslant \|(A(t) - A(\infty))A(0)^{-1}\|$$
$$\cdot \|A(0)A(t)^{-1}\| \to 0 \text{ ，当 } t \to \infty \text{ 时。}$$

因此对 t 充分大，$A(\infty)A(t)^{-1}$ 是可逆的。用 $C(t)$ 表示其逆，容易看出 $A(t)^{-1}C(t)$ 是 $A(\infty)$ 的逆。

现在我们可以证明 (8.13) 和 (8.14) 如下：设 $u(t)$ 是 (8.1) 的解，命 $u(\infty) = A(\infty)^{-1}f(\infty)$。如果 $v(t) = u(t) - u(\infty)$，则

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + A(t)v(t) = f(t) - A(t)u(\infty) = g(t), \\ v(0) = x - u(\infty), \end{cases} \tag{8.16}$$

显然 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上是 Hölder 连续的和

$$\|g(t)\| \leqslant \|f(t) - f(\infty)\| + \|(A(\infty) - A(t))A(\infty)^{-1}f(\infty)\|$$
$$\leqslant \|f(t) - f(\infty)\| + \|(A(\infty) - A(t))A(0)^{-1}\|$$
$$\cdot \|A(0)A(\infty)^{-1}f(\infty)\| \to 0 \text{ ，} \tag{8.17}$$

当 $t \to \infty$ 时。因此由证明的第一部分当 $t \to \infty$ 时，$\|v(t)\| \to 0$。从而当 $t \to \infty$ 时，$u(t) \to u(\infty)$，并且完成了(8.13)和(8.14)的证明。

为了证明所述的最后部分，即当 $t \to \infty$ 时 $u'(t) \to 0$。我们需要进一步的估计，这在下一个引理中被叙述和证明了。

引理 8.3 设定理 8.2 的条件成立，则对 $\mu\leqslant s<\tau, t$，

$$\|A(t)S_t(t-s)-A(s)S_s(t-s)\|\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\alpha/2-1}e^{-(t-s)}$$
(8.18)

和

$$\|R(t,s)-R(\tau,s)\|\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}(t-\tau)^{\beta}(\tau-s)^{\alpha/2-\beta-1}e^{-(\tau-s)}$$
(8.19)

这里 $0<\theta<\delta$，$0<\beta<\frac{\alpha}{2}$ 和象前面一样

$$\rho(\mu)=\sup\{\|(A(t)-A(s))A(r)^{-1}\|:\ \mu\leqslant s,\ t<\infty,\ 0\leqslant r<\infty\}.$$

引理 8.3 的证明 首先估计 (8.18) 用围道积分同 (6.18) 类似地得到。设 $\Gamma=\{\lambda:\ |\arg\lambda|=\theta\}$ 和 $\Gamma_\delta=\{\lambda:\ \lambda-\delta\in\Gamma\}$，则

$$A(t)S_t(t-s)-A(s)S_s(t-s)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\lambda e^{-\lambda(t-s)}[R(\lambda;A(t))-R(\lambda;A(s))]d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}e^{-(t-s)}\int_{\Gamma}(\lambda+\delta)e^{-\lambda(t-s)}$$

$$\cdot[R(\lambda+\delta;\ A(t))-R(\lambda+\delta;\ A(s))]d\lambda. \qquad (8.20)$$

但是，

$$\|R(\lambda+\delta;\ A(t))-R(\lambda+\delta;\ A(s))\|$$

$$\leqslant\|R(\lambda+\delta;A(t))\|\cdot\|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\|$$

$$\cdot\|A(s)R(\lambda+\delta;A(s))\|\leqslant C\|(A(t)-A(s))A(s)^{-1}\|\frac{1}{|\lambda+\delta|}$$

$$\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\alpha/2}\frac{1}{|\lambda+\delta|}, \qquad (8.21)$$

这里我们利用了(8.7)和 (P_2)。用 (8.21) 估计 (8.20) 得到 (8.18)。

为了证明(8.19)我们注意如果我们用(8.7)估计 $\|(A(t)-A(s))A(\tau)^{-1}\|$，并且遵循引理 6.4 的证明，则对于 $\mu\leqslant s<\tau\leqslant t$ 我们得到

$$\|R_1(t,s)-R_1(\tau,s)\|\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}\ (t-\tau)^{\beta}(\tau-s)^{\alpha/2-\beta-1}e^{-\theta(\tau-s)},\tag{8.22}$$

这里 $0<\beta<\frac{\alpha}{2}$。回忆一下（见(8.8)）

$$\begin{aligned}\|R_1(t,s)\|&\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}\,(t-s)^{\alpha/2-1}e^{-\theta(t-s)}\\&\leqslant C_{\beta,\theta}\sqrt{\rho(\mu)}\,(t-s)^{\beta-1}e^{-\theta(t-s)}\end{aligned}\tag{8.23}$$

和

$$\|R(t,s)\|\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}\,(t-s)^{\alpha/2-1}e^{-\theta(t-s)},\tag{8.24}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\int_\tau^t R_1(t,\sigma)R(\sigma,s)d\sigma\right\|&\leqslant C\rho(\mu)e^{-\theta(t-s)}(\tau-s)^{\alpha/2-1}\int_\tau^t(t-\sigma)^{\beta-1}d\sigma\\&\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}\,(t-\tau)^{\beta}(\tau-s)^{\alpha/2-1}e^{-\theta(t-s)}.\end{aligned}\tag{8.25}$$

象证明推论 6.5 一样地估计 $\|R(t,s)-R(\tau,s)\|$，并利用 (8.22)，(8.24)和(8.25)即得到(8.19)。

现在我们回到定理 8.2 的证明。对每一 $t\geqslant s>0$，初值问题(8.1)的解 u 能写成

$$u(t)=U(t,s)u(s)+\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma.$$

因为由(6.10)

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)u(s)\right\|\leqslant\|A(t)U(t,s)\|\cdot\|u(s)\|\leqslant\frac{C}{t-s},$$

所以只须证明

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_s^t S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma \tag{8.26}$$

的范数可以通过选取 s 和 $t>s$ 充分大使得象我们所期望的那样小。为此我们分别考虑(8.26)的右端的每一项。

为了估计第一项我们记

$$\delta(\mu)=\sup\{\|f(t)-f(s)\|: \mu\leqslant s,\ t<\infty\}.$$

由假设 (F) 知 $\mu\to\infty$ 时 $\delta(\mu)\to 0$ 和

$$\|f(t)-f(s)\|\leqslant\sqrt{\delta(\mu)}\ |t-s|^{\alpha/2},\ \text{对于}\ \mu\leqslant s,t<\infty\ \text{成立}. \tag{8.27}$$

经简单计算得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma=\int_s^t[A(t)S_t(t-\sigma)-A(\sigma)S_\sigma(t-\sigma)]$$

$$f(\sigma)d\sigma-\int_s^t A(t)S_t(t-\sigma)[f(\sigma)-f(t)]d\sigma+S_t(t-s)f(t). \tag{8.28}$$

因此利用(8.18)，(8.27)和(8.4)分别估计(8.28) 右端的三项我们得到

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t S_\sigma(t-\sigma)f(\sigma)d\sigma\right\|\leqslant C\|f\|_\infty\sqrt{\rho(\mu)}$$

$$+C\sqrt{\delta(\mu)}+C\|f\|_\infty e^{-\delta(t-s)}. \tag{8.29}$$

为了估计 (8.26) 右端的第二项我们注意由定理 7.1 的证明有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma=\int_s^t \frac{\partial}{\partial t}W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma \qquad (8.30)$$

和从(6.35)

$$\frac{\partial W(t,s)}{\partial t}=\int_s^t [A(t)S_t(t-\tau)-A(\tau)S_\tau(t-s)]R(\tau,s)d\tau$$

$$+\int_s^t A(t)S_t(t-\tau)[R(t,s)-R(\tau,s)]d\tau+S_t(t-s)R(t,s).$$

用(8.18)，(8.24)，(8.19)，(8.5)和(8.4)估计右端的每一项得

$$\left\|\frac{\partial W(t,s)}{\partial t}\right\|\leqslant C\sqrt{\rho(\mu)}(t-s)^{\alpha/2-1}e^{-\delta(t-s)}, \qquad (8.31)$$

因此

$$\left\|\int_s^t \frac{\partial}{\partial t}W(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma\right\|\leqslant C\|f\|_\infty\sqrt{\rho(\mu)}. \qquad (8.32)$$

组合(8.29)和(8.30)并注意当 $\mu\to\infty$ 时，$\rho(\mu)\to 0$ 和 $\delta(\mu)\to 0$ 知对任意 $\varepsilon>0$，存在 μ 使得如果 $t>s\geqslant\mu$，则

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)d\sigma\right\|<\varepsilon+C\|f\|_\infty e^{-\delta(t-s)}.$$

这就完成了定理 8.2 的证明。

定理 8.2 表明如果当 $t\to\infty$ 时，$A(t)$ 收敛到 $A(\infty)$ 和 $f(t)$ 收敛到 $f(\infty)$，则初值问题(8.1)的解 $u(t)$ 当 $t\to\infty$ 时收敛到一个极限 $u(\infty)$。为了得到 $u(t)$ 收敛到 $u(\infty)$ 的更详细的信息，我们必须知道 $A(t)$ 收敛到 $A(\infty)$ 和 $f(t)$ 收敛到 $f(\infty)$ 的更多的东西。我们用这方面的一个结果来结

束本节。

我们将作以下假设：

(A$_n$) 算子 $A(t)$ 有展式

$$A(t)=A_0+\frac{1}{t}A_1+\frac{1}{t^2}A_2+\cdots+\frac{1}{t^n}A_n+\frac{1}{t^n}B_n(t), \qquad (8.33)$$

这里 A_0 是一个稠定的闭线性算子，其预解集 $\rho(A_0)$ 满足 $\rho(A_0)\supset\{\lambda;\ Re\lambda\leqslant 0\}$ 和

$$\|R(\lambda;\ A_0)\|\leqslant\frac{M_0}{|\lambda|+1}, \quad \lambda\in\rho(A_0). \qquad (8.34)$$

算子 A_k，$1\leqslant k\leqslant n$ 和 $B_n(t)$ 对于 $t\geqslant 0$ 是闭线性的满足 $D(A_k)\supset D(A_0)$ 和 $D(B_n(t))\supset D(A_0)$。而且有界线性算子 $B_n(t)A_0^{-1}$ 满足

$$\|B_n(t)A_0^{-1}-B_n(s)A_0^{-1}\|\leqslant C|t-s|^\rho \qquad (8.35)$$

对某一 $0<\rho\leqslant 1$，$C>0$ 成立和

$$\lim_{t\to 0}\|B_n(t)A_0^{-1}\|=0. \qquad (8.36)$$

并且

(F$_n$) 函数 $f(t)$ 有以下展开式

$$f(t)=f_0+\frac{1}{t}f_1+\frac{1}{t^2}f_2+\cdots+\frac{1}{t^n}f_n+\frac{1}{t^n}\varphi_n(t), \qquad (8.37)$$

这里 $\varphi_n(t)$ 关于 t 是 Hölder 连续的和

$$\lim_{t\to\infty}\|\varphi_n(t)\|=0. \qquad (8.38)$$

我们注意如果 $\{A(t)\}_{t\geqslant 0}$ 对某一 $n\geqslant 0$ 满足 (A$_n$)，则它亦满足 (A$_k$)，其中 $0\leqslant k\leqslant n$，这里

$$B_k(t)=\sum_{l=k+1}^{n} t^{-l+k}A_l+t^{-n+k}B_n(t)\,.$$

而且如果 $A(t)$ 满足 (A_n)，其中 $n\geqslant 1$，则 $A(t)+\frac{a}{t}I$ 亦然，这里 I 是恒等算子。最后如果 $f(t)$ 满足 (F_n)，则对于一个适当定义的 $\varphi_k(t)$，它亦满足 (F_k)，其中 $0\leqslant k\leqslant n$。

我们首先指出假设 (A_n) 蕴涵存在一个 $t_0>0$，使得族 $\{A(t)\}_{t\geqslant t_0}$ 满足对于初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=f(t),\ \ t>t_0\\ u(t_0)=x\end{cases}\tag{8.39}$$

存在唯一的解 $u(t)$ 的必要条件，其中 f 满足条件 (F)。更确切地我们有

引理 8.4 设 $\{A(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足 (A_n)，其中 $n\geqslant 0$。则存在 $t_0>0$ 使得 $\{A(t)\}_{t\geqslant t_0}$ 满足

(i) 对每一 $t\geqslant t_0$，$A(t)$ 的预解式 $R(\lambda;A(t))$ 对所有 $Re\lambda\leqslant 0$ 存在和

$$\|R(\lambda;A(t))\|\leqslant\frac{M}{|\lambda|+1}，\text{对所有 } Re\lambda\leqslant 0 \text{ 的 } \lambda \text{ 成立。}$$

(ii) 存在常数 L 和 $0<\alpha\leqslant 1$ 使得

$\|(A(t)-A(s))A(\tau)^{-1}\|\leqslant L|t-s|^{\alpha}$，对于 $t_0\leqslant t,s,\tau$ 成立。

(iii) 算子 $\|A(t)A(s)^{-1}\|$ 对 $t_0\leqslant s$，$t<\infty$ 是一致有界的和

$$\lim_{t\to\infty}\|(A(t)-A_0)A_0^{-1}\|=0\,.\tag{8.40}$$

证明 (i) 命 $Q(t)=A(t)-A_0$。由闭图象定理对每一 $t>0$ 和 $\lambda\in\rho(A_0)$，$Q(t)R(\lambda;A_0)$ 是一个有界线性算子，而且对 $Re\lambda\leqslant 0$ 的 λ 我们有

$$\|Q(t)R(\lambda;A_0)\|\leqslant\sum_{l=1}^{n}\gamma_l t^{-l}+B_n(t)t^{-n}, \qquad (8.41)$$

这里 $\gamma_l=(M_0+1)\|A_lA_0^{-1}\|$ 和 $\beta_n(t)=(M_0+1)\|B_n(t)A_0^{-1}\|$。因此存在 $t_0>0$ 使得对 $t\geqslant t_0$ 和 $Re\lambda\leqslant 0$，$\|Q(t)R(\lambda;A_0)\|<\frac{1}{2}$。固定如此的 $t_0>0$，设 λ 使得 $Re\lambda\leqslant 0$，并考虑

$$\lambda I-A(t)=[I-Q(t)R(\lambda;A_0)](\lambda I-A_0). \qquad (8.42)$$

对 $t\geqslant t_0$ (8.42) 右端的算子是可逆的和

$$\|R(\lambda;A(t))\|\leqslant\|R(\lambda;A_0)\|\cdot\|(I-Q(t))R(\lambda;A_0)^{-1}\|\leqslant\frac{2M_0}{|\lambda|+1}$$

对所有 $Re\lambda\leqslant 0$ 的 λ 成立。特别对 $t\geqslant t_0$，$A(s)^{-1}$存在。

(ii) 利用 $B_n(t)A_0^{-1}$ 的 Hölder 连续性容易推出对 $t\geqslant t_0>0$，算子 $A(t)A_0^{-1}$ 是 Hölder 连续的，其中指数 $0<\rho\leqslant 1$。对 $\tau\geqslant t_0$，$\|Q(\tau)A_0^{-1}\|<\frac{1}{2}$。由此算子 $I+Q(t)A_0^{-1}$ 是可逆的，其逆 $A_0A(\tau)^{-1}$ 的范数小于或等于 2。因此

$$\|(A(t)-A(s))A(\tau)^{-1}\|\leqslant\|(A(t)-A(s))A_0^{-1}\|\cdot\|A_0A(\tau)^{-1}\|\leqslant C|t-s|^{\rho}.$$

(iii) 对 $t, s\geqslant t_0$ 我们有

$$\|A(t)A(s)^{-1}\|\leqslant\|A(t)A_0^{-1}\|\cdot\|A_0A(s)^{-1}\|\leqslant 2\|A(t)A_0^{-1}\|\leqslant 2\|I+Q(t)A_0^{-1}\|\leqslant 3$$

最后在(8.41)中选取 $\lambda=0$ 并让 $t\to\infty$ 得(8.40)。

引理 8.4 推出结果 $A(t)$ 对 $t\geqslant 0$ 满足 (A_n)，其中 $n\geqslant 0$，

则 $\{A(t)\}_{t\geq t_0}$ 在 $[t_0,\infty)$ 上满足假设(P_1)—(P_4)，其中$A(\infty)=A_0$。此外，容易验证如果 f 满足 (F_n)，其中 $n\geqslant 0$，则它满足假设 (F)，其中 $f(\infty)=f_0$。因此在这些假设下初值题(8.39) 在 $[t_0,\infty)$ 上有唯一的解 u。

定理 8.5 设 $A(t)$ 对某一 $n>0$ 满足条件(A_n)。又设 f 对同一 $n>0$ 满足条件 (F_n)。如果 u 是初值问题(8.39)的解，则对 $t\geqslant t_0$，

$$u(t)=u_0+\frac{1}{t}u_1+\frac{1}{t^2}u_2+\cdots+\frac{1}{t^n}u_n+\frac{1}{t^n}v_n(t), \qquad (8.43)$$

这里当 $t\to\infty$ 时，$v_n(t)\to 0$ 和

$$A_0u_0=f_0 \qquad (8.44)$$

$$A_0u_k-(k-1)u_{k-1}+\sum_{\nu=1}^{k}A_\nu u_{k-\nu}=f_k\text{，对于 }1\leqslant k\leqslant n\text{ 成立，} \qquad (8.45)$$

证明 对 $n=0$ 定理 8.5 显然除了符号上的改变外和定理 8.2 一致，因此对 $n=0$ 定理真。假设对 $(m-1)<n$ 定理真，则方程(8.43)，(8.44)和(8.45)对 $m-1$ 代替 n成立。我们将证明在这种情形定理对 m 也真。命

$$u(t)=u_0+\frac{1}{t}v_1+\frac{1}{t^2}u_2+\cdots+\frac{1}{t^{m-1}}u_{m-1}+\frac{1}{t^m}w(t), \qquad (8.46)$$

这里 u_k，$0\leqslant k\leqslant m-1$ 由(8.45)依次逐一确定。将(8.46)代入微分方程

$$\frac{du(t)}{dt}+A(t)u(t)=f(t), \qquad (8.47)$$

我们得到

$$\frac{1}{t^m}\left[\frac{dw}{dt}+\left(A(t)-\frac{m}{t}I\right)w\right]$$

$$=\frac{1}{t^m}\left[(m-1)u_{m-1}-\sum_{\nu=1}^{m}A_\nu u_{m-\nu}+f_m-B_m(t)u_0\right.$$

$$\left.+\varphi_m(t)+\frac{1}{t}g(t)\right], \qquad (8.48)$$

这里

$$B_m(t)=\sum_{l=m+1}^{n}t^{-l+m}A_l+t^{-n+m}B_n(t),$$

$$\varphi_m(t)=\sum_{l=m+1}^{n}t^{-l+m}f_l+t^{-n+m}\varphi_n(t)$$

和 $g(t)$ 是形 如 $t^{-k}(A_l u_j+B_m(t)u_i)$，$0\leqslant k, j\leqslant m-1$ 和 $0\leqslant i$，$l\leqslant m$ 的项的有限和。容易验证对 $t\geqslant t_0>0$，$t^{-1}g(t)$ 关于 t 是 Hölder 连续的。用 t^m 乘以(8.48)的两边我们得到

$$\frac{dw}{dt}+\left(A(t)-\frac{m}{t}I\right)w=(m-1)u_{m-1}-\sum_{\nu=1}^{m}A_\nu u_{m-\nu}$$

$$+f_m+[\varphi_m(t)-B_m(t)u_0+t^{-1}g(t)].$$

在右端依赖于 t 的项是 Hölder 连续的，并且当 $t\to\infty$ 时趋于零。显然算子 $A(t)-\frac{m}{t}I$ 满足 (A_0)，因此由对 $n=0$ 的我们的定理有

$$w(t)=u_m+v_m(t), \qquad (8.49)$$

这里

$$\lim_{t\to\infty}\|v_m(t)\|=0 .$$

将(8.49)代入(8.46)得到所期待的对于 m 的结果。这样定理由归纳法得证。

第六章　若干非线性发展方程

§6.1　线性发展方程的 Lipschitz 扰动

在本节我们将研究以下半线性初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt}+Au(t)=f(t,u(t)), & t>t_0 \\ u(t_0)=u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $-A$ 是 Banach 空间 X 中的一个 C_0 半群的无穷小生成元，f：$[t_0,T]\times X\to X$ 关于 t 是连续的和关于 u 满足一个 Lipschitz 条件。

在本节和以下各节的大部分结果中 A 被假设为不依赖于 t，这可以很容易地推广到 A 依赖于 t 的情况。只要算子族 $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ 对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 保证存在一个发展系统 $U(t,s)$。这里我们将不处理这种扩张，因此以下各节（§6.1—6.3 节）是同第五章的结果无关的。

初值问题（6.1）不必有任何种类的解。然而如果它有一个古典或强解（见定义 4.2.8），则在 §4.2节开始时所给的论证表明这个解 u 必满足积分方程

$$u(t)=T(t-t_0)u_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,u(s))ds. \tag{1.2}$$

因此自然有

定义 1.1 积分方程 (1.2) 的一个连续解 u 称为初值问题 (1.1) 的一个 mild 解。

我们从下面的一个经典结果开始，它保证了 (1.1) 的 mild 解对于 Lipschitz 连续函数 f 的存在性和唯一性。

定理 1. 设 f: $[t_0,T]\times X\to X$ 关于 t 在 $[t_0,T]$ 上连续和在 X 上一致 Lipschitz 连续（具常数 L）。如果 $-A$ 是 X 上一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，则对每一 $u_0\in X$，初值问题 (1.1) 有唯一的 mild 解 $u\in C([t_0,T];X)$。而且映象 $u_0\to u$ 是从 X 到 $C([t_0,T];X)$ 内 Lipschitz 连续的。

证明 对一个给定的 $u_0\in X$ 我们定义映象

$$F: C([t_0,T];X)\to C([t_0,T];X)$$

如下：

$$(Fu)(t)=T(t-t_0)u_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,u(s))ds,$$

$$\text{对于 } t_0\leqslant t\leqslant T. \tag{1.3}$$

用 $\|u\|_\infty$ 表示作为 $C([t_0,T];X)$ 的一个元素 u 的范数，由 F 的定义容易推出

$$\|(Fu)(t)-(Fv)(t)\|\leqslant ML(t-t_0)\|u-v\|_\infty, \tag{1.4}$$

这里 M 是 $\|T(t)\|$ 在 $[t_0,T]$ 上的一个界。利用 (1.3)，(1.4) 和对 n 用归纳法易得

$$\|(F^n u)(t)-(F^n v)(t)\|\leqslant\frac{(ML(t-t_0))^n}{n!}\|u-v\|_\infty.$$

因此

$$\|F^n u-F^n v\|\leqslant\frac{(MLT)^n}{n!}\|u-v\|_\infty. \tag{1.5}$$

对充分大的 n，有 $(MLT)^n/n!<1$。由压缩原理的一个熟知的推广，F 在 $C([t_0,T];X)$ 中有唯一的不动点，这个不动点是所期望的积分方程（1.2）的解。

u 的唯一性和映象 $u_0 \to u$ 的 **Lipschitz** 连续性是以下论证的推论。设 v 是（1.1）在 $[t_0,T]$ 上具有初值 v_0 的一个 **mild** 解。则

$$\|u(t)-v(t)\| \leq \|T(t-t_0)u_0 - T(t-t_0)v_0\|$$

$$+\int_{t_0}^{t} \|T(t-s)(f(s,u(s))-f(s,v(s)))\|ds$$

$$\leq M\|u_0-v_0\| + ML\int_{t_0}^{t}\|u(s)-v(s)\|ds \text{ ,}$$

由 **Gronwall** 不等式推出

$$\|u(t)-v(t)\| \leq Me^{ML(T-t_0)}\|u_0-v_0\| \text{ ,}$$

因此

$$\|u-v\|_\infty \leq Me^{ML(T-t_0)}\|u_0-v_0\| \text{ .}$$

由此得 u 的唯一性和映象 $u_0 \to u$ 的 **Lipschitz** 连续性。

不难看出如果 $g \in C([t_0,T]; X)$ 和在定理 1.2 的证明中我们变更 F 的定义为

$$(Fu)(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds \text{ ,}$$

则我们得到以下稍为一般的结果。

推论 1.3 如果 A 和 f 满足定理 1.2 的条件，则对每一 $g \in C([t_0,T]; X)$，积分方程

$$\omega(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,\omega(s))ds \tag{1.6}$$

有唯一的解 $\omega\in C([t_0,T];X)$。

在定理 1.2 中函数 f 的一致 Lipschitz 条件保证了(1.1)的 mild 解的全局（即定义在整个 $[t_0,T]$ 上）存在性。如果我们仅假设 f 关于 u 满足一个局部的 Lipschitz 条件对 t 在有界区间上是一致的。即对每一 $t'\geqslant 0$ 和常数 $C\geqslant 0$，存在一个常数 $L(C,t')$ 使得

$$\|f(t,u)-f(t,v)\|\leqslant L(C,t')\|u-v\| \tag{1.7}$$

对所有 $u,v\in X$，$\|u\|\leqslant C$，$\|v\|\leqslant C$ 和 $t\in[0,t']$ 成立，则我们有定理 1.2 的以下局部形式。

定理 1.4 设 f：$[0,\infty)\times X\to X$ 对于 $t\geqslant 0$ 连续和对于 u 局部 Lipschitz 连续关于 t 在有界区间上是一致的。如果 $-A$ 是 X 上的一个 C_0 半群的无穷小生成元，则对每一 $u_0\in X$ 存在一个 $t_{max}\leqslant\infty$ 使得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+Au(t)=f(t,u(t)), & t\geqslant 0\\ u(0)=u_0\end{cases} \tag{1.8}$$

在 $[0,t_{max})$ 上有唯一的 mild 解。而且如果 $t_{max}<\infty$，则

$$\lim_{t\uparrow t_{max}}\|u(t)\|=\infty.$$

证明 我们首先证明对每一 $t_0\geqslant 0$，$u_0\in X$，初值问题(1.1) 在我们的定理的假设下有唯一的 mild 解 u 在一个区间 $[t_0,t_1]$ 上存在，而这个区间的长度的下界为

$$\sigma(t_0,\|u_0\|)=\min\left\{1,\ \frac{\|u_0\|}{K(t_0)L(K(t_0),t_0+1)+N(t_0)}\right\}, \tag{1.9}$$

这里 $L(C,t)$ 是如 (1.7) 所定义的 f 的局部 Lipschitz 常

数，$M(t_0)=\max\{\|T(t)\|: 0\leqslant t\leqslant t_0+1\}$，$K(t_0)=2\|u_0\|M(t_0)$ 和 $N(t_0)=\max\{\|f(t,0)\|: 0\leqslant t\leqslant t_0+1\}$。事实上，设 $t_1=t_0+\sigma(t_0,\|u_0\|)$，这里 $\sigma(t_0,\|u_0\|)$ 是由(1.9)给定的。由(1.3)定义的映象 F 映 $C([t_0,t_1]: X)$ 中半经为 $K(t_0)$，中心在 0 的球到其自身，这由以下估计得知

$$
\begin{aligned}
\|(Fu)(t)\| &\leqslant M(t_0)\|u_0\| \\
&+\int_{t_0}^{t}\|T(t-s)\|(\|f(s,u(s))-f(s,0)\|+\|f(s,0)\|)ds \\
&\leqslant M(t_0)\|u_0\|+M(t_0)K(t_0)L(K(t_0),t_0+1)(t-t_0) \\
&+M(t_0)N(t_0)(t-t_0) \\
&\leqslant M(t_0)\{\|u_0\|+K(t_0)L(K(t_0),t_0+1)(t-t_0)+N(t_0)(t-t_0)\} \\
&\leqslant 2M(t_0)\|u_0\|=K(t_0),
\end{aligned}
$$

这里最后的不等式由 t_1 的定义得到。在这个球中 F 关于常数 $L=L(K(t_0),t_0+1)$ 满足一致 Lipschitz 条件。因此如在定理 1.2 的证明中一样它在这个球中具有唯一的不动点 u。这个不动点是 (1.1) 在区间 $[t_0, t_1]$ 上所期待的解。

由我们刚才所证明的如果 u 是 (1.8) 在区间 $[0,T]$ 上的一个 mild 解，则存在 $\delta>0$ 使得它能延拓到区间 $[0,T+\delta]$。由定义，在 $[\tau,\tau+\delta]$ 上，$u(t)=w(t)$，这里 $w(t)$ 是积分方程

$$
w(t)=T(t-\tau)u(\tau)+\int_{\tau}^{t}T(t-s)f(s,w(s))ds, \quad \tau\leqslant t\leqslant\tau+\delta \tag{1.10}
$$

的解。此外 δ 仅依赖于 $\|u(\tau)\|$，$K(\tau)$ 和 $N(\tau)$。

设 $[0,t_{max})$ 是 (1.8) 的 mild 解的最大存在区间。如果 $t_{max}<\infty$，则 $\lim\limits_{t\to t_{max}}\|u(t)\|=\infty$。因为否则存在一个序列 $t_n\uparrow$

t_{max}，使得对所有 n，$\|u(t_n)\| \leqslant C$。由我们刚才所证明的这将推出对每一个充分接近 t_{max} 的 t_n，定义在 $[0,t_n]$ 上的 u 能被延拓到 $[0,t_n+\delta]$，这里 $\delta>0$ 是不依赖于 t_n 的。因此 u 能被延拓到超过 t_{max}，这和 t_{max} 的定义相矛盾。

为了证明 (1.8) 的局部 mild 解的唯一性。我们注意如果 ν 是 (1.8) 的一个 mild 解，则在 u 和 ν 都存在的每一个闭区间 $[0,t_0]$ 上，由定理 1.2 的证明的末尾所给的唯一性的论证，它们是重合的。因此 u 和 ν 有相同的 t_{max} 和在 $[0, t_{max})$ 上，$u \equiv \nu$。

众所周知在一般情况下，如果 f 仅满足定理 1.2 或定理 1.4 的条件，则 (1.1) 的 mild 解不必是一个古典解或者甚至不必是一个强解。对于 (1.1) 的 mild 解是一个古典解的一个充分条件是在下面给出了。

定理 1.5 （正则性） 设 $-A$ 是 X 上一个 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 f：$[t_0,T]\times X \to X$ 是从 $[t_0,T]\times X$ 到 X 内连续可微的，则 (1.1) 对于 $u_0 \in D(A)$ 的mild解是初值问题的一个古典解。

证明 我们首先注意 f 从 $[t_0,T]\times X$ 到 X 内的连续可微性蕴涵 f 关于 t 是连续的和关于 u 是 Lipschitz 连续的对于 t 在 $[t_0,T]$ 上一致。因此由定理 1.2，初值问题 (1.1) 在 $[t_0,T]$ 上具有唯一的 mild 解 u。其次我们证明这个 mild 解在 $[t_0,T]$ 上是连续可微的。为此我们命 $B(s)=\frac{\partial}{\partial u}f(s,u)$ 和

$$g(t)=T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))-AT(t-t_0)u_0$$

$$+\int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s))ds. \qquad (1.11)$$

由我们的假设和 $g\in C([t_0,T];X)$，函数 $h(t,u)=B(t)u$ 关于 t 从 $[t_0,T]$ 到 X 内连续和关于 u 一致 Lipschitz 连续，因为 $s\to B(s)$ 从 $[t_0,T]$ 到 $B(X)$ 内连续。设 w 是积分方程

$$w(t)=g(t)+\int_{t_0}^{t} T(t-s)B(s)w(s)ds \qquad (1.12)$$

的解。推论 1.3 推出 $w\in C([t_0,T];X)$ 的存在和唯一性。而且从我们的假设有

$$f(s,u(s+h))-f(s,u(s))=B(s)(u(s+h)-u(s))+\omega_1(s,h) \qquad (1.13)$$

和

$$f(s+h,u(s+h))-f(s,u(s+h))$$
$$=\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s+h))h+\omega_2(s,h), \qquad (1.14)$$

这里当 $h\to 0$ 时，$h^{-1}\|\omega_i(s,h)\|\to 0$，$i=1,2$ 在 $[t_0,T]$ 上是一致的。若记 $w_h(t)=h^{-1}(u(t+h)-u(t))-w(t)$，由 u 的定义，(1.12)，(1.13) 和 (1.14) 我们得到

$$w_h(t)=[h^{-1}(T(t+h-t_0)u_0-T(t-t_0)u_0)+AT(t-t_0)u_0]$$
$$+\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)(\omega_1(s,h)+\omega_2(s,h))ds$$
$$+\int_{t_0}^{t} T(t-s)\left(\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s+h))-\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s))\right)ds$$
$$+\left[\frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds-T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))\right]$$

$$+\int_{t_0}^{t} T(t-s)B(s)W_h(s)ds . \tag{1.15}$$

不难看出当 $h\to0$ 时，(1.15) 右端的前四项中的每一项的范数趋于零。因此我们有

$$\|w_h(t)\|\leqslant\varepsilon(h)+M\int_{t_0}^{t}\|w_h(s)\|ds , \tag{1.16}$$

这里 $M=\max\{\|T(t-s)\|\cdot\|B(s)\|: t_0\leqslant s\leqslant T\}$ 和当 $h\to0$ 时，$\varepsilon(h)\to0$ 。对(1.16)用 Gronwall 不等式得 $\|w_h(t)\|\leqslant\varepsilon(h)e^{(T-h_0)M}$ 。因此当 $h\to0$ 时 $\|w_h(t)\|\to0$ ，这就推出 $u(t)$ 在 $[t_0, T]$ 上是可微的并且导数是 $w(t)$。因为 $w\in C([t_0, T]; X)$，所以 u 在 $[t_0, T]$ 上是连续可微的。

最后为了证明 u 是 (1.1) 的一个古典解，我们注意从 u 的连续可微性和对 f 的可微性假设推出 $s\to f(s,u(s))$ 在 $[t_0, T]$ 上是连续可微的。于是由推论 4.2.5 得

$$v(t)=T(t-t_0)u_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,u(s))ds \tag{1.17}$$

是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dv(t)}{dt}+Av(t)=f(t,u(t)) ,\\ v(t_0)=u_0\end{cases} \tag{1.18}$$

的一个古典解。但是由定义，u 是 (1.18) 的一个 mild 解，并由 (1.18) 的 mild 解的唯一性知在 $[t_0, T]$ 上 $u=v$ 。因此 u 是初值问题 (1.1) 的一个古典解。

在一般情况下如果 f: $[t_0, T]\times X\to X$ 仅关于两个变量是 Lipschitz 连续的。即

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| \leqslant C(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|),$$
$$\text{对于 } t_1, t_2 \in [t_0, T] \text{ 成立}, \qquad (1.19)$$

则 (1.1) 的 mild 解不必是初值问题的一个强解，然而如果 X 是自反的，则 f 的 Lipschitz 连续性充分保证了具有初值 $u_0 \in D(A)$ 的 mild 解 u 是一个强解。事实上我们有

定理 1.6 设 $-A$ 是一个自反 Banach 空间 X 上的 C_0 半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。如果 f: $[t_0, T] \times X \to X$ 关于两个变量是 Lipschitz 连续的。$u_0 \in D(A)$ 和 u 是初值问题 (1.1) 的 mild 解，则 u 是这个初值问题的强解。

证明 设 $\|T(t)\| \leqslant M$ 和 $t_0 \leqslant t \leqslant T$，$\|f(t, u(t))\| \leqslant N$。又设 f 满足 (1.19)。对 $0 < h < t - t_0$ 我们有

$$u(t+h) - u(t) = T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0$$
$$+ \int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s) f(s, u(s)) ds$$
$$+ \int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))] ds$$

因此

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leqslant hM\|Au_0\| + hMN$$
$$+ MC\int_{t_0}^{t} (h + \|u(s+h) - u(s)\|) ds$$
$$\leqslant C_1 h + MC\int_{t_0}^{t} \|u(s+h) - u(s)\| ds$$

由 Gronwall 不等式推出

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leqslant C_1 e^{TMC} h \qquad (1.20)$$

和 u 是 Lipschitz 连续的。

u 的 Lipschitz 连续性同 f 的 Lipschitz 连续性一起推出 $t \to f(t,u(t))$ 在 $[t_0, T]$ 上是 Lipschitz 连续的。于是由推论 4.2.11 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av = f(t,u(t)) \\ v(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{1.21}$$

在 $[t_0, T]$ 上有唯一的强解 v 满足

$$v(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds = u(t),$$

因此 u 是 (1.1) 的一个强解。

我们以定理 1.2 为我们提供的初值问题 (1.1) 具有古典解的应用来结束本节。设 $-A$ 是 X 上一个 C_0 半群的无穷小生成元。我们赋予 A 的定义域以图象范数。即对 $x \in D(A)$，我们定义 $|x|_A = \|x\| + \|Ax\|$。不难验证 $D(A)$ 赋予范数 $|\cdot|_A$ 是一个 Banach 空间，我们用 Y 表示它。Y 的完备性是 A 的闭性的一个直接推论。显然 $Y \subset X$。因为 $T(t)$: $D(A) \to D(A)$，$T(t)$ 对于 $t \geq 0$ 是 Y 上的一个半群，而且易见它是 Y 上的一个 C_0 半群。

定理 1.7 设 $f: [t_0,T] \times Y \to Y$ 在 Y 上是一致 Lipschitz 的和对每一 $y \in Y$，设 $f(t,y)$ 从 $[t_0, T]$ 到 Y 内是连续的。如果 $u_0 \in D(A)$，则初值问题 (1.1) 在 $[t_0, T]$ 上有唯一的古典解。

证明 我们在 Y 中应用定理 1.2 得到一个函数 $u \in C([t_0, T]: Y)$ 在 Y 中。因而在 X 中满足

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds. \tag{1.22}$$

令 $g(s)=f(s,u(s))$。由我们的假设知 $g(s)\in D(A)$ 对于 $s\in[t_0, T]$ 成立和 $s\to Ag(s)$ 在 X 中是连续的。因此由推论 4.2.6，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}+Av=g(t) \\ v(t_0)=u_0 \end{cases}$$

在 $[t_0, T]$ 上有唯一的古典解，而这个解显然也是 (1.23) 的一个 mild 解，因此

$$v(t)=T(t-t_0)u_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)g(s)ds$$

$$=T(t-t_0)u_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,u(s))ds=u(t)\ .$$

从而 u 是 (1.1) 在 $[t_0, T]$ 上的一个古典解。

如果在上述定理中我们仅假设 f: $[t_0, T]\times Y\to Y$ 在 Y 中对于 $t\in[t_0, T]$ 一致地局部 Lipschitz 连续，则利用定理 1.4 我们得到对每一 $u_0\in D(A)$，初值问题在一个最大区间 $[t_0, t_{max})$ 上有一个古典解，并且如果 $t_{max}<T$，则

$$\lim_{t\uparrow t_{max}}(\|u(t)\|+\|Au(t)\|)=\infty\ . \qquad (1.24)$$

我们注意在这种情形 $\|u(t)\|$ 可能在 $[t_0, t_{max})$ 上是有界的，而仅仅当 $t\uparrow t_{max}$ 时，$\|Au(t)\|\to\infty$。这是在对偏微分方程的许多应用中会出现的情况。

§6.2 具紧半群的半线性方程

我们继续研究半线性初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt}+Au(t)=f(t,u(t)), & t>0 \\ u(0)=u_0 . \end{cases} \tag{2.1}$$

在上一节我们已经在 $-A$ 是一个 C_0 算子半群的无穷小生成元而 $f(t,x)$ 关于它的两个变量是连续的和关于 x 是一致局部 **Lipschitz** 连续的假设下证明了初值问题 (2.1) 的 mild 解 (定义 1.1) 的存在性，如果 f 关于 x 的 **Lipschitz** 连续性被去掉，则熟知 (2.1) 的 mild 解的存在性不再有保证，即使 $A\equiv 0$ 。在这种情形下为了保证 (2.1) 的 mild 解的存在性，我们必须进一步加强关于算子 A 的条件。我们在本节中的主要假设是 $-A$ 是一个紧 C_0 半群 (定义 2.3.1) 的无穷小生成元。我们注意在应用中紧半群的无穷小生成元常发生于 $-A$ 有紧预解式和生成一个解析半群 $T(t)$, $t\geqslant 0$ 的情形。事实上，在这种情形由定理 2.5.2(*d*)

$$\|T(t_1)-T(t_2)\|\leqslant\frac{C}{t_1}|t_2-t_1|,\quad 0<t_1<t_2 .$$

从而 $T(t)$ 对 $t>0$ 是依一致算子拓扑连续的，因此由定理 2.3.3 它对 $t>0$ 也是紧的。

本节的的主要结果是以下局部存在定理。

定理 2.1 设 X 是一个 **Banach** 空间，$U\subset X$ 是开集，

设 $-A$ 是一个紧半群 $T(t)$，$t\geqslant 0$ 的无穷小生成元，如果对 $0<a\leqslant\infty$，f：$[0,a)\times U\to X$ 是连续的，则对每一 $u_0\in U$ 存在 $t_1=t_1(u_0)$，$0<t_1<a$ 使得初值问题（2.1）有一个 mild 解 $u\in C([0,t_1];\ U)$。

证明 因为这里我们仅对局部解感兴趣，我们可以假设 $a<\infty$。设 $\|T(t)\|\leqslant M$，$0\leqslant t\leqslant a$ 和 $t'>0$，$\rho>0$ 使得 $B_\rho(u_0)=\{v:\ \|v-u_0\|\leqslant\rho\}\subset U$ 和 $\|f(s,v)\|\leqslant N$，$0\leqslant s\leqslant t'$ 和 $v\in B_\rho(u_0)$。选取 $t''>0$ 使得

$$\|T(t)u_0-u_0\|<\rho/2,\ \text{对于}\ 0\leqslant t\leqslant t''\ \text{成立}.$$

并设

$$t_1=\min\left(t',\ t'',\ a,\ \frac{\rho}{2MN}\right).$$

令 $Y=C([0,t_1];\ X)$，$Y_0=\{u:\ u\in Y,\ u(0)=u_0,\ u(t)\in B_\rho(u_0),\ 0\leqslant t\leqslant t_1\}$。显然 Y_0 是 Y 的一个有界闭凸子集，我们定义一个映象 F：$Y\to Y_0$ 如下：

$$(Fu)(t)=T(t)u_0+\int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds. \qquad (2.3)$$

因为

$$\|(Fu)(t)-u_0\|\leqslant\|T(t)u_0-u_0\|+\left\|\int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds\right\|$$
$$\leqslant\rho/2+t_1MN\leqslant\rho,$$

所以 F 映 Y_0 到 Y_0 内。又由 f 在 $[0,a)\times U$ 上的连续性易得 F 是 Y_0 到 Y_0 内的一个连续映象，此外 F 映 Y_0 到 Y_0 的一个预紧子集中。为了证明这一点我们首先证明对每一个固定的 t，$0\leqslant t\leqslant t_1$，集 $Y_0(t)=\{(Fu)(t):\ u\in Y_0\}$ 在 X 中是预紧的。因为 $Y_0(0)=\{u_0\}$，所以这对 $t=0$ 是显然的。

设 $t>0$ 是固定的。对 $0<\varepsilon<t$ 命

$$(Fu)(t)=T(t)u_0+\int_0^{t-\varepsilon}T(t-s)f(s,u(s))ds$$

$$=T(t)u_0+T(\varepsilon)\int_0^{t-\varepsilon}T(t-s-\varepsilon)f(s,u(s))ds\ .$$

因为对每一 $t>0$，$T(t)$ 是紧的，所以对每一 ε，$0<\varepsilon<t$，集 $Y_\varepsilon(t)=\{(F_\varepsilon u)(t):\ u\in Y_0\}$ 在 X 中是预紧的，而且对于 $u\in Y_0$ 我们有

$$\|(Fu)(t)-(F_\varepsilon u)(t)\|\leqslant\int_{t-\varepsilon}^{t}\|T(t-s)f(s,u(s))\|ds\leqslant\varepsilon MN,$$

这就推出 $Y_0(t)$ 在 X 中是全有界的，即预紧的。我们继续证明

$$F(Y_0)=\widetilde{Y}=\{Fu:\ u\in Y_0\}\tag{2.4}$$

是一个等度连续函数族，对 $t_2>t_1>0$ 我们有

$$\|(Fu)(t_1)-(Fu)(t_2)\|\leqslant\|(T(t_1)-T(t_2))u_0\|$$

$$+N\int_0^{t_1}\|T(t_2-s)-T(t_1-s)\|ds+(t_2-t_1)MN。\tag{2.5}$$

(2.5) 的右端是不依赖于 $u\in Y_0$，并且当 $t_2-t_1\to0$ 时趋于零，这是由于对于 $t>0$，$T(t)$ 是紧算子，从而 $T(t)$ 对 $t>0$ 依一致算子拓扑连续（定理 2.3.2）。

又显然 $\widetilde{Y}$ 在 Y 中是有界的。所期待的 $\widetilde{Y}=F(Y_0)$ 的预紧性现在是 Arzela-Ascoli 定理的一个推论。最后由 Schauder 不动点定理知 F 在 Y_0 中有一不动点，并且 F 的任一不动点是 $[0,t_1]$ 上 (2.1) 的对 $0\leqslant t\leqslant t_1$ 满足 $u(t)\in U$ 的 mild 解。

现在我们转向全局存在性，这里必需作进一步的假设，

因为全局存在性通常不能成立，我们从以下结果开始。

定理 2.2 设 $-A$ 是 X 上一个紧半群 $T(t)$，$t\geq 0$ 的无穷小生成元，如果 f：$[0,\infty)\times X\to X$ 是连续的和映 $[0,\infty)\times X$ 中的有界集为 X 中的有界集，则对每一 $u_0\in X$ 初值问题（2.1）有一个 mild 解 u 在一个最大的存在区间 $[0,t_{max})$ 上存在，如果 $t_{max}<\infty$，则

$$\lim_{t\uparrow t_{max}}\|u(t)\|=\infty. \tag{2.6}$$

证明 我们首先注意定义在一个闭区间 $[0,t_1]$上的(2.1)的 mild 解能通过定义 $u(t+t_1)=W(t)$ 延拓到一个较大的区间 $[0,t_1+\delta]$，$\delta>0$ 其中 $W(t)$ 是

$$\begin{cases}\dfrac{dW(t)}{dt}+AW(t)=f(t+t_1,W(t))\\ W(0)=u(t_1)\end{cases} \tag{2.7}$$

的一个 mild 解，它在一个正长度 $\delta>0$ 的区间上的存在性由定理 2.1 所保证。设 $[0,t_{max})$ 是 (2.1) 的 mild 解能延拓到的最大区间。我们将指出如果 $t_{max}<\infty$，则当 $t\uparrow t_{max}$ 时 $\|u(t)\|\to\infty$ 为此我们首先证明 $t_{max}<\infty$蕴涵 $\overline{\lim_{t\uparrow t_{max}}}\|u(t)\|=\infty$。

事实上如果 $t_{max}<\infty$.和 $\overline{\lim_{t\uparrow t_{max}}}\|u(t)\|<\infty$，则我们能假设 $\|T(t)\|\leq M$ 和 $\|u(t)\|\leq K$，$0\leq t<t_{max}$，这里 M 和 K 是常数，由我们对函数 f 的假设我们也有一个常数 N 使得 $\|f(t,u(t))\|\leq N$ 对于 $0\leq t<t_{max}$ 成立。现在如果 $0<\rho<t<t'<t_{max}$，则

$$\|u(t')-u(t)\|\leq\|T(t')u_0-T(t)u_0\|$$

$$+\left\|\left(\int_0^{t-\rho}+\int_{t-\rho}^{t}\right)(T(t'-s)-T(t-s))f(s,u(s))ds\right\|$$

$$+\left\|\int_t^{t'}T(t'-s)f(s,u(s))ds\right\|$$

$$\leqslant\|T(t')u_0-T(t)u_0\|+N\int_0^{t-\rho}\|T(t'-s)-T(t-s)\|ds$$

$$+2MN\rho+(t'-t)MN\ . \tag{2.8}$$

因为 $t>\rho>0$ 是任意的和 $T(t)$ 对 $t\geqslant\rho>0$ 是依一致算子拓扑连续的，所以当 t, t' 趋于 t_{max} 时，(2.8) 的右端趋于零，因此 $\lim\limits_{t\uparrow t_{max}} u(t)=u(t_{max})$ 存在，并且由证明的第一部分解 u 能延拓到超过 t_{max}，这与 t_{max} 的最大性相矛盾，因此假设 $t_{max}<\infty$ 蕴涵 $\overline{\lim\limits_{t\uparrow t_{max}}}\|u(t)\|=\infty$。为了结束证明我们将指出 $\lim\limits_{t\uparrow t_{max}}\|u(t)\|=\infty$。如果这不成立，则存在一个序列 $t_n\uparrow t_{max}$ 和常数 K 使得对所有 n，$\|u(t_n)\|\leqslant K$。设 $\|T(t)\|\leqslant M$ 对于 $0\leqslant t\leqslant t_{max}$ 成立和 $N=\sup\{\|f(t,x)\|;\ 0\leqslant t\leqslant t_{max},\ \|x\|\leqslant M(K+1)\}$。因为 $t\to\|u(t)\|$ 是连续的和 $\overline{\lim\limits_{t\uparrow t_{max}}}\|u(t)\|=\infty$，我们能找到一个序列 $\{h_n\}$ 具有以下性质：当 $n\to\infty$ 时 $h_n\to 0$，$\|u(t)\|\leqslant M(K+1)$，对于 $t_n\leqslant t\leqslant t_n+h_n$ 成立和 $\|u(t_n+h_n)\|\leqslant M(K+1)$。然而我们有

$$M(K+1)=\|u(t_n+h_n)\|\leqslant\|T(h_n)u(t_n)\|$$

$$+\int_{t_n}^{t_n+h_n}\|T(t_n+h_n-s)f(s,u(s))\|ds$$

$$\leqslant MK+h_nNM\ .$$

当 $h_n\to 0$ 时这是荒谬的。因此我们有 $\lim\limits_{t\uparrow t_{max}}\|u(t)\|=\infty$。证毕。

我们用两个对于在定理 2.2 的假设下初值问题（2.1）存在全局的 mild 解的有用的条件来结束本节。

推论 2.3 设 $-A$ 是 X 上一个紧 C_0 半群 $T(t)$，$t\geqslant 0$ 的无穷小生成元。设 f：$[0,\infty)\times X\to X$ 是连续的和映 $[0,\infty)\times X$ 中的有界集为 X 中的有界集，则对每一 $u_0\in X$ 初值问题（2.1）存在一个全局解 $u\in C([0,\infty)\times X)$，如果以下条件之一成立：

(i) 存在一个连续函数 $k_0(s)$：$[0,\infty)\to(0,\infty)$ 使得 $\|u(t)\|\leqslant k_0(t)$ 对每一在 u 的存在区间中的 t 成立。

(ii) 存在两个局部可积函数 $k_1(s)$ 和 $k_2(s)$ 使得

$$\|f(s,x)\|\leqslant k_1(s)\|x\|+k_2(s),\quad \text{对于 } 0\leqslant s<\infty,\ x\in X \text{成立。} \tag{2.9}$$

证明 部分 (i) 是定理 2.2 的一个平凡推论。为了证明 (ii) 我们将它化为 (i) 的情况：假设解 u 在区间 $[0,t)$ 上存在。令 $\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$ 和

$$\Psi(t)=M\|u_0\|+\int_0^t Me^{-\omega s}k_2(s)ds\ .$$

因此显然所定义的函数 Ψ 在 $[0,\infty)$ 上是连续的，并且我们有

$$\begin{aligned}\|u(t)\|e^{-\omega t}&\leqslant e^{-\omega t}\|T(t)u_0\|+e^{-\omega t}\int_0^t\|T(t-s)f(s,u(s))\|ds\\&\leqslant\Psi(t)+\int_0^t Mk_1(s)\|u(s)\|e^{-\omega s}ds\,,\end{aligned}\tag{2.10}$$

由 Gronwall 不等式

$$\|u(t)\|e^{-\omega t}\leqslant\Psi(t)+M\int_0^t k_1(s)\Psi(s)\exp\left\{M\int_s^t k_1(r)dr\right\}ds.$$

这就推出 $\|u(t)\|$ 被一个连续函数控制的有界性。

§6.3 具有解析半群的半线性方程

象我们在 6.2 节开头简要提及到的，初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{du(t)}{dt}+Au(t)=f(t,u(t)), & t>t_0 \\
u(t_0)=x_0
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

在应用中常发生的情况是算子 $-A$ 是 Banach 空间 X 上的一个解析半群的无穷小生成无，在这种情形如果对某 $\lambda\in\rho(-A)$，$R(\lambda;-A)$ 是紧的和 $f(t,x)$ 在 $[t_0,T]\times X$ 中是连续的，那么由定理 2.1 问题有一个（可能不唯一）mild 局部解。如果我们进一步假设，象我们在后面将作的那样，f 在某种意义下关于 $-A$ 是正则的，则我们能够得到初值问题 (3.1) 的唯一的局部强解。

在整个这一节，我们将假设 $-A$ 是 Banach 空间 X 上的一个解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，为方便起见我们亦将假设 $T(t)$ 是有界的，即 $\|T(t)\|\leqslant M$，对 $t\geqslant 0$ 成立和 $0\in\rho(A)$，即 $-A$ 是可逆的。

我们注意如果 $-A$ 是一个解析半群的无穷小生成元，则对充分大的 $a>0$，$-A-aI$ 是可逆的并生成一个有界的解析半群，这使得能够将 $-A$ 是一个解析半群的无穷小生成元的一般情况化为半群是有界的和 $-A$ 是可逆的情况。

由我们对 A 的假设和 §2.2.6 节的结果知 A^α 能对 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 定义和 A^α 是一个闭线性可逆算子，其定义域 $D(A^\alpha)$ 在

X 中稠密，A^α 的闭性蕴涵 $D(A^\alpha)$ 赋予 A^α 的图象范数，即范数 $|||x||| = \|x\| + \|A^\alpha x\|$，是一个 Banach 空间。因为 A^α 是可逆的，所以其图象范数 $|||\cdot|||$ 等价于范数 $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$。因此 $D(A^\alpha)$ 赋予范数 $\|\ \|_\alpha$ 是一个 Banach 空间，我们用 X_α 表示。显然，由这个定义，$0<\alpha<\beta$ 蕴涵 $X_\alpha \supset X_\beta$ 和 X_β 到 X_α 中的嵌入是连续的。

我们关于 (3.1) 中的函数 f 的主要假设将是

假设(F)　设 U 是 $R^+ \times X_\alpha$ 的一个开子集。称函数 f：$U \to X$ 满足条件 (F)，如果对每一 $(t,x) \in U$ 存在一个邻域 $V \subset U$ 和常数 $L \geqslant 0$，$0<\theta\leqslant 1$ 使得

$$\|f(t_1,x_1) - f(t_2,x_2)\| \leqslant L(|t_1 - t_2|^\theta + \|x_1 - x_2\|_\alpha) \qquad (3.2)$$

对一切 $(t_i, x_i) \in V$ 成立。

现在我们能叙述和证明本节的主要存在性结果。

定理 3.1　设 $-A$ 是一个满足 $\|T(t)\| \leqslant M$ 的解析半群的无穷小生成元。进一步假设 $0 \in \rho(-A)$。如果 f 满足假设 (F)，则对每一初值 $(t_0, x_0) \in U$，初值问题 (3.1) 有唯一的局部解 $u \in C([t_0,t_1);X) \cap C'((t_0,t_1);X)$，这里 $t_1 = t_1(t_0,x_0) > t_0$。

证明　由我们对算子 A 的假设知（定理 2.6.13）

$$\|A^\alpha T(t)\| \leqslant C_\alpha t^{-\alpha} \quad 对于\ t>0\ 成立。 \qquad (3.3)$$

对于证明的其余部分我们固定 $(t_0,x_0) \in U$，并选择 $t_1' > t_0$，$\delta > 0$ 使得估计 (3.2) 对某固定的常数 L 和 θ 在集 $V = \{(t, x): t_0 \leqslant t \leqslant t_1',\ \|x - x_0\|_\alpha \leqslant \delta\}$ 中成立。设

$$B = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1'} \|f(t,x_0)\|, \qquad (3.4)$$

并选取 t_1 使得

$$\|T(t-t_0)A^\alpha x_0 - A^\alpha x_0\| < \delta/2, \text{ 对于 } t_0 \leqslant t < t_1 \text{ 成立。} \tag{3.5}$$

和

$$0 < t_1 - t_0 < \min\left\{ t_1' - t_0, \left[\frac{\delta}{2}(1-\alpha)C_\alpha^{-1}(B+\delta L)^{-1}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} \tag{3.6}$$

记 Y 为 Banach 空间 $C([t_0,t_1];X)$，通常在 Y 中赋予上确界范数，并用 $\|\cdot\|_Y$ 表示。在 Y 上我们定义一个映象 F 如下

$$Fy(t) = T(t-t_0)A^\alpha x_0 + \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s) f(s, A^{-\alpha} y(s)) ds . \tag{3.7}$$

显然 F: $Y \to Y$ 和对每一 $y \in Y$，$Fy(t_0) = A^\alpha x_0$. 设 S 是 Y 的非空闭的和有界的子集，

$$S = \{y;\ y \in Y,\ y(t_0) = A^\alpha x_0,\ \|y(t) - A^\alpha x_0\| \leqslant \delta\}. \tag{3.8}$$

对 $y \in S$ 我们有

$$\begin{aligned}
\|Fy(t) - A^\alpha x_0\| &\leqslant \|T(t-t_0)A^\alpha x_0 - A^\alpha x_0\| \\
&+ \left\| \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s)[f(s, A^{-\alpha} y(s)) - f(s, x_0)] ds \right\| \\
&+ \left\| \int_{t_0}^{t} A^\alpha T(t-s) f(s, x_0) ds \right\| \\
&\leqslant \frac{\delta}{2} + C_\alpha (L\delta + B) \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} ds \\
&= \frac{\delta}{2} + C_\alpha (1-\alpha)^{-1} (L\delta + B)(t_1 - t_0)^{1-\alpha} \leqslant \delta ,
\end{aligned}$$

这里我们利用了 (3.2)，(3.3)，(3.6) 和 (3.8). 因此 F: $S \to S$. 而且如果 $y_1, y_2 \in S$，则

$$\|Fy_1(t)-Fy_2(t)\|$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{t}\|A^{\alpha}T(t-s)\|\|f(s,A^{-\alpha}y_1(s))-f(s,A^{-\alpha}y_2(s))\|ds$$

$$\leqslant LC_{\alpha}(1-\alpha)^{-1}(t_1-t_0)^{1-\alpha}\|y_1-y_2\|\leqslant\frac{1}{2}\|y_1-y_2\|_Y .$$

这就推出

$$\|Fy_1-Fy_2\|\leqslant\frac{1}{2}\|y_1-y_2\|_Y，对于 y_1, y_2\in S 成立。\tag{3.9}$$

由压缩映象原理映象 F 有唯一的不动点 $y\in S$ 。这个不动点满足积分方程

$$y(t)=T(t-t_0)A^{\alpha}x_0+\int_{t_0}^{t}A^{\alpha}T(t-s)f(s,A^{-\alpha}y(s))ds ,$$

$$对于 t_0\leqslant t\leqslant t_1 成立 . \tag{3.10}$$

由 (3.2) 和 y 的连续性知 $t\to f(t, A^{-\alpha}y(t))$ 在 $[t_0, t_1]$ 上是连续的。因此在这个区间上是有界的。设

$$\|f(t,A^{-\alpha}y(t))\|\leqslant N，对于 t_0\leqslant t\leqslant t\leqslant t_1 成立。\tag{3.11}$$

其次我们打算证明 $t\to f(t,A^{-\alpha}y(t))$ 在 $(t_0,t_1]$ 上是局部 **Hölder** 连续的，为此我们首先指出(3.10) 的解 y 在 $(t_0,t_1]$ 上是局部 **Hölder** 连续的。

我们注意对每一满足 $0<\beta<1-\alpha$ 的 β 和每一 $0<h<1$ 由定理 2.6.13 我们有

$$\|(T(h)-I)A^{\alpha}T(t-s)\|\leqslant C_{\beta}h^{\beta}\|A^{\alpha+\beta}T(t-s)\|$$
$$\leqslant Ch^{\beta}(t-s)^{-(\alpha+\beta)} . \tag{3.12}$$

如果 $t_0<t<t+h\leqslant t_1$，则

$$\|y(t+h)-y(t)\|\leqslant\|(T(h)-I)A^{\alpha}T(t-t_0)x_0\|$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|(T(h)-I)A^{\alpha}T(t-s)f(s,A^{-\alpha}x(s))\|ds$$

$$+\int_{t}^{t+h}\|A^{\alpha}T(t+h-s)f(s,A^{-\alpha}y(s))\|ds$$

$$=I_1+I_2+I_3\ . \tag{3.13}$$

我们将利用 (3.11) 和 (3.12) 分别估计 (3.13) 的每一项。

$$I_1\leqslant C(t-t_0)^{-(\alpha+\beta)}h^{\beta}\|x_0\|\leqslant M_1h^{\beta}\ , \tag{3.14}$$

$$I_2\leqslant CNh^{\beta}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-(\alpha+\beta)}ds\leqslant M_2h^{\beta}\ , \tag{3.15}$$

$$I_3\leqslant NC_{\alpha}\int_{t}^{t+h}(t+h-s)^{-\alpha}ds=\frac{NC_{\alpha}}{1-\alpha}h^{1-\alpha}\leqslant M_3h^{\beta}. \tag{3.16}$$

请注意，M_2 和 M_3 可以对于 $t\in[t_0,t_1]$ 无关的选择，而 M_1 依赖于 t 和在 $t\downarrow t_0$ 时趋于无穷，综合 (3.13) 和这些估计推出对每一 $t_0'>t_0$ 存在一个常数 C 使得

$$\|y(t)-y(s)\|\leqslant C|t-s|^{\beta},\ 对于\ t_0<t_0'\leqslant t,s\leqslant t_1\ 成立。 \tag{3.17}$$

因此 y 在 $(t_0,t]$ 上是局部 Hölder 连续的，现在 $t\to f(t,A^{-\alpha}y(t))$ 的局部 Hölder 连续性由以下得到

$$\|f(s,A^{-\alpha}y(s))-f(t,A^{-\alpha}y(t))\|\leqslant L(|t-s|^{\theta}+\|y(t)-y(s)\|)$$

$$\leqslant C_1(|t-s|^{\theta}+|t-s|^{\beta}). \tag{3.18}$$

设 y 是 (3.10) 的解并考虑非齐次初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du(t)}{dt}+Au(t)=f(t,A^{-\alpha}y(t)),\\ u(t_0)=x_0\ .\end{cases} \tag{3.10}$$

由推论 4.3.3，这个问题有唯一的解 $u\in C^1((t_0,t_1];X)$。(3.19) 的解是由

$$u(t)=T(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,A^{-\alpha}y(s))ds \quad (3.20)$$

给出．对 $t>t_0$，(3.20) 的每一项是在 $D(A)$ 中，因而在 $D(A^\alpha)$ 中，用 A^α 作用 (3.20) 的两边我们得到

$$A^\alpha u(t)=T(t-t_0)A^\alpha x_0+\int_{t_0}^{t}T(t-s)f(s,A^{-\alpha}y(s))ds \quad (3.20)$$

给出．对 $t>t_0$，(3.20) 的每一项是在 $D(A)$ 中，因而在 $D(A^\alpha)$ 中，用 A^α 作用 (3.20) 的两边我们得到

$$A^\alpha u(t)=T(t-t_0)A^\alpha x_0+\int_{t_0}^{t}A^\alpha T(t-s)f(s,A^{-\alpha}y(s))ds\,. \quad (3.21)$$

但由(3.10)，(3.21)的右端等于 $y(t)$．因此 $u(t)=A^{-\alpha}y(t)$ 和由 (3.20) u 是 (3.1) 的一个 $C^1((t_0,t_1]:X)$解，u 的唯一性容易从 (3.10) 和 (3.19) 的解的唯一性得到．证毕．

定理 3.1 表明在适当的条件下在区间 $(t_0,t_1]$ 上我们有初值问题 (3.1) 的一个连续可微的解．实际上更多的结果成立．解的导数 u' 在 $(t_0,t_1]$ 上是局部 **Hölder** 连续的．这是以下正则性结果的推论．

推论 3.2 设 A 和 f 满足定理 3.1 的假设．又设 f 对每一 $(t,x)\in U$ 满足 (3.2) (即常数 θ 和 L 在 U 中是一致的)．如果 u 是初值问题 (3.1)在 $[t_0,t_1]$ 上的解，则 $\frac{du}{dt}$ 在 $(t_0,t_1]$ 上是局部 **Hölder** 连续的，其指数 $\nu=\min(\theta,\beta)$，这里 β 是满足 $0<\beta<1-\alpha$ 的任意数．

证明 设 $0<\beta<1-\alpha$．在定理 3.2 的证明中我们已经

指出如果 u 是初值问题 (3.1) 的解，则对每一 $t_0<t_0'<t_1$，$f(t,u(t))$ 在 $[t_0',t_1]$ 上是 Hölder 连续的，其指数 $\nu=\min(\theta,\beta)$。于是由定理 4.3.5 对每一 $t_0''>t_0'$，$\frac{du}{dt}$ 在 $[t_0'',t_1]$ 上是 Hölder 连续的，并且有相同的指数 ν。

我们以 (3.1) 的全局解的存在性的一个结果来结束本节。

定理 3.3 设 $0\in\rho(-A)$，$-A$ 是一个对 $t\geqslant0$ 满足 $\|T(t)\|\leqslant M$ 的解析半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。设 $f:[t_0,\infty)\times X_\alpha\to X$ 满足(F)。如果存在一个连续的非减实值函数 $k(t)$ 使得

$$\|f(t,x)\|\leqslant k(t)(1+\|x\|_\alpha) \text{ 对于 } t\geqslant t_0,\ x\in X_\alpha \text{ 成立,} \tag{3.22}$$

则对每一 $x_0\in X_\alpha$，初值问题 (3.1) 对所有 $t\geqslant t_0$ 有唯一的解 u 存在。

证明 应用定理 3.1 只要 $\|u(t)\|_\alpha$ 保持有界我们就能延拓 (3.1) 的解，因此只须证明如果 u 在 $[0,T)$ 上存在，则当 $t\uparrow T$ 时，$\|u(t)\|_\alpha$ 是有界的。因为

$$A^\alpha u(t)=A^\alpha T(t-t_0)x_0+\int_{t_0}^t A^\alpha T(t-s)f(t,u(s))ds,$$

所以

$$\|u(t)\|_\alpha\leqslant M\|A^\alpha x_0\|+\frac{k(T)T^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$
$$+k(T)\int_{t_0}^t(t-s)^{-\alpha}\|u(s)\|_\alpha ds.$$

根据引理 5.6.7 这就推出在 $[0,T)$ 上 $\|u(t)\|_\alpha\leqslant C$。证毕。

§6.4　一个拟线性发展方程

本节我们将在 Banach 空间 X 中讨论拟线性初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt}+A(t,u)u=0, & \text{对于 } 0\leqslant t\leqslant T, \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

初值问题（4.1）同前面各节所处理的半线性初值问题的区别在于这里出现在问题中的线性算子 $A(t,u)$ 明确地依赖于问题的解 u，而在半线性的情形非线性算子是一个固定的线性算子（不依赖于解 u）和一个 u 的非线性"函数"的和。

一般来说拟线性初值问题的研究是相当复杂的。为简单起见我们在本节将只限于一个相当简单的论述，即初值问题（4.1）有 mild 解。在给出定义之后我们首先简要地指出一般的想法，然后给出这种 mild 解的存在性的证明。

设 $u\in C([0,T];X]$，考虑线性初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}+A(t,u)v=0 & \text{对于 } 0\leqslant t\leqslant T, \\ v(0)v_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

如果对每一给定的 $u\in C([0,T];X)$ 这个问题有唯一的 mild 解 $v\in C([0,T];X)$，则它定义了一个从 $C([0,T];X)$ 到自身中的映象 $u\rightarrow v=F(u)$。这个映象的不动点定义为（4.1）的 mild 解。

为了证明(4.1)的一个局部的 mild 解的存在性我们将指出在适当的条件下，总存在一个 T'，$0<T'\leqslant T$ 使得映象 F 在 $C([0,T'];X)$ 上的限制是映 $C([0,T']:X)$ 的某球到自身的压缩映象。于是压缩映象原理将推出在这个球中存在 F 的唯一不动点 u，且由定义 u 是(4.1)所期待的 mild 解。

为了实现上述的想法，我们需要作一些准备工作，我们从线性初值问题(4.2)的 mild 解的存在性开始。为此我们修改 §5.3 节的假设 (H_1)—(H_3) 使得它们依赖于一个附加的参数。

定义 4.1 设 B 是 X 的一个子集。对每一 $0\leqslant t\leqslant T$ 和 $b\in B$ 设 $A(t,b)$ 是 X 上的一个 C_0 半群 $S_{t,b}(s)$，$s\geqslant 0$ 的无穷小生成元。称算子族 $\{A(t,b)\}$ 对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$ 是稳定的，如果存在常数 $M\geqslant 1$ 和 ω 使得

$$\rho(A(t,b))\supset(\omega,\infty)，\text{对于 }(t,b)\in[0,T]\times B\text{ 成立。}\tag{4.3}$$

和

$$\left\|\prod_{j=1}^{k} R(\lambda;A(t_j,b_j))\right\|\leqslant M(\lambda-\omega)^{-k}\tag{4.4}$$

对于 $\lambda>\omega$ 和每一有限序列 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant T$，$b_j\in B$，$1\leqslant j\leqslant k$ 成立。

不难指出(见定理 5.2.2 的证明) $\{A(t,b)\}$ 对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$ 的稳定性推出

$$\left\|\prod_{j=1}^{k} S_{t_j,b_j}(s_j)\right\|\leqslant M\exp\left\{\omega\sum_{j=1}^{k} s_j\right\}\tag{4.5}$$

对于 $s_j\geqslant 0$ 和任何有限序列 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_k\leqslant T$ ，$b_j\in B$，$1\leqslant j\leqslant k$ 成立。

设 X 和 Y 是 Banach 空间使得 Y 稠密地和连续地嵌入在 X 中。设 $B\subset X$ 是 X 的一个子集使得对每一 $(t,b)\in[0,T]\times B$，$A(t,b)$ 是 X 上一个 C_0 半群 $S_{t,b}(s)$，$s\geqslant 0$ 的无穷小生成元。我们作以下假设：

$(\widetilde{H}_1)$ 族 $\{A(t,b)\}$ 对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$ 是稳定的。

$(\widetilde{H}_2)$ 对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$，Y 是 $A(t,b)$-容许的和 $A(t,b)$ 在 Y 中的部分 $\widetilde{A}(t,b)$ 的族 $\{\widetilde{A}(t,b)\}$ 对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$ 在 Y 中是稳定的。

$(\widetilde{H}_3)$ 对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$，$D(A(t,b))\supset Y$，$A(t,b)$ 是从 Y 到 X 内的一个有界线性算子和对每一 $b\in B$，$t\to A(t,b)$ 依 $B(Y,X)$ 的范数 $\|\cdot\|_{Y\to X}$ 是连续的。

$(\widetilde{H}_4)$ 存在常数 L 使得

$$\|A(t,b_1)-A(t,b_2)\|_{Y\to X}\leqslant L\|b_1-b_2\| \qquad (4.1)$$

对每一 $b_1,b_2\in B$ 和 $0\leqslant t\leqslant T$ 成立。

引理 4.2 设 $B\subset X$，$u\in C([0,T];X)$ 在 B 中取值，如果 $\{A(t,b)\}$，对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$ 是一个满足假设 $(\widetilde{H}_1)$—$(\widetilde{H}_4)$ 的算子族。则 $\{A(t,u(t))\}_{t\in[0,T]}$ 是一个满足定理 5.3.1 的假设 (H_1)—(H_3) 的算子族。

证明 由 $(\widetilde{H}_1)$ 和 $(\widetilde{H}_2)$ 即得 $\{A(t,u(t))\}_{t\in[0,T]}$ 满足 (H_1) 和 (H_2)，而且显然由 $(\widetilde{H}_3)$，对 $t\in[0,T]$，$D(A(t,u(t)))\supset$

Y 和 $A(t,u(t))$ 是从 Y 到 X 的一个有界线性算子，剩下只须证明 $t\to A(t,u(t))$ 依 $B(Y,X)$ 的范数是连续的，但由 $(\widetilde{H}_4)$ 我们有

$$\|A(t_1,u(t_1))-A(t_2,u(t_2))\|_{Y\to X}$$
$$\leq\|A(t_1,u(t_1))-A(t_2,u(t_1))\|_{Y\to X}+C\|u(t_1)-u(t_2)\|. \tag{4.7}$$

因为 $u(t)$ 在 X 中是连续的，所以 $t\to A(t,b)$ 的连续性连同 (4.7) 一起推出 $t\to A(t,u(t))$ 依 $B(Y,X)$ 的范数的连续性.

作为引理 4.2 和定理 5.3.1 的一个推论我们有

定理 4.3 设 $B\subset X$, $\{A(t,b)\}$ 对于 $(t,b)\in[0,t]\times B$ 是满足条件 $(\widetilde{H}_1)$—$(\widetilde{H}_4)$ 的算子族. 如果 $u\in C([0,T];X)$ 在 B 中取值，则在 X 中对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ 存在唯一的发展系统 $U_u(t,s)$ 满足

$$\|U_u(t,s)\|\leqslant Me^{\omega(t-s)} \text{ 对于 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \text{ 成立}, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial^+}{\partial t}U_u(t,s)w|_{t=s}=A(s,u(s))w \text{ 对于 } w\in Y,\ 0\leqslant s\leqslant T \text{ 成立}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}U_u(t,s)w=-U_u(t,s)A(s,u(s))w$$

$$\text{对于 } w\in Y,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \text{ 成立}. \tag{4.10}$$

对每一在 B 中取值的函数 $u\in C([0,T];X)$ 和 $u_0\in X$，函数 $v(t)=U_u(t,0)u_0$ 定义一个初值问题 (4.2) 的 mild 解. 因此由定理 4.3 如果族 $\{A(t,b)\}$ 对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$ 满足条件 $(\widetilde{H}_1)$—$(\widetilde{H}_4)$，则对每一 $u_0\in X$ 和在 B 中取值的

$u \in C([0,T];X)$，初值问题 (4.2) 具有唯一的 mild 解 v 给出如下：

$$v(t) = U_u(t,0)u_0 . \tag{4.11}$$

在后面我们亦需要如下连续依赖的结果。

引理 4.4 设 $B \subset X$，$\{A(t,b)\}$ 对于 $(t,b) \in [0,T] \times B$ 满足条件$(\widetilde{H}_1)$—$(\widetilde{H}_4)$。则存在常数 C_1 使得对每一在 B 中取值的 u，$v \in C([0,T];X)$ 和每一 $w \in Y$ 我们有

$$\|U_u(t,s)w - U_v(t,s)w\| \leqslant C_1 \|w\|_Y \int_s^t \|u(\tau) - v(\tau)\| d\tau . \tag{4.12}$$

证明 象在定理 5.3.1 的证明中一样对每一 $w \in Y$ 我们得到估计

$$\|U_u(t,s)w - U_v(t,s)w\|$$
$$\leqslant C\|w\|_Y \int_s^t \|A(\tau,u(\tau)) - A(\tau,v(\tau))\|_{Y \to X} d\tau , \tag{4.13}$$

这里 C 仅依赖于 $\{A(t,b)\}$ 和 $\{\widetilde{A}(t,b)\}$ 的稳定常数。组合 (4.13) 和 $(\widetilde{H}_4)$ 即得 (4.12) .

现在我们转到初值问题 (4.1) 的局部 mild 解的存在性。在下面的结果中初值 u_0 将假设是在 Y 中和 B 将是一个中心在 u_0 半径为 r 的 X 中的球。

定理 4.5 设 $u_0 \in Y$，$B = \{x : \|x - u_0\| \leqslant r\}$，$r > 0$. 如果 $\{A(t,b)\}$ 对于 $(t,b) \in [0,T] \times B$ 满足假设$(\widetilde{H}_1)$—$(\widetilde{H}_4)$，则存在一个 T'，$0 < T' \leqslant T$ 使得初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t,u)u = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T' \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.14}$$

有唯一的 mild 解 $u\in C([0,T'];X)$ 和 $u(t)\in B$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T'$ 成立。

证明 我们首先注意常值函数 $u(t)\equiv u_0$ 满足定理 4.3 的假设。因此存在一个相应于 u_0 的发展系统 $U_{u_0}(t,s)$，$0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$。设 $0<t_1\leqslant T$ 使得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant t_1}\|U_{u_0}(t,0)u_0-u_0\|<\frac{r}{2}$$

和选取

$$T'=\min\left\{t_1,\ \frac{1}{2}(C\|u_0\|_Y+1)^{-1}\right\},\tag{4.15}$$

这里 C 是出现在引理 4.4 中的常数。在 $C([0,T'];X)$ 的闭子集

$$\mathscr{I}=\{u:\ u\in C([0,T']:\ X),u(0)=u_0,\|u(t)-u_0\|\leqslant r,0\leqslant t\leqslant T\}\tag{4.16}$$

上，我们考虑映象

$$Fu(t)=U_u(t,0)u_0\,,\ \text{对于}\ 0\leqslant t\leqslant T'.\tag{4.17}$$

由我们的假设和定理 4.3 显然 F 在 $\mathscr{I}$ 中有定义并且它的值域在 $C([0,T'];X)$ 中，我们指出 $F:\ \mathscr{I}\to\mathscr{I}$。事实上，对 $u\in\mathscr{I}$ 显然我们有 $Fu(0)=u_0$，并且根据引理 4.4 及 (4.15)

$$\|Fu(t)-u_0\|\leqslant\|U_u(t,0)u_0-U_{u_0}(t,0)u_0\|+\|U_{u_0}(t,0)u_0-u_0\|$$

$$\leqslant Cr\|u_0\|_YT'+\frac{r}{2}\leqslant r\,.$$

此外如果 $u_1,u_2\in\mathscr{I}$，则由引理 4.4

$$\|Fu_1(t)-Fu_2(t)\|=\|U_{u_1}(t,0)u_0-U_{u_2}(t,0)u_0\|$$

$$\leqslant C\|u_0\|_Y\int_0^t\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|d\tau$$

$$\leqslant C\|u_0\|_Y T'\|u_1-u_2\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\|u_1-u_2\|_\infty,$$

这里 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C([0,T'];X)$ 中通常的上确界范数。由最后的不等式立刻得到

$$\|Fu_1-Fu_2\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}\|u_1-u_2\| \qquad (4.18)$$

因此 F 是压缩的，由压缩映象原理 F 有唯一的不动点 $u\in\mathscr{S}$，它是 (4.14) 在 $[0,T')$ 上所期待的 mild 解。

定理 4.5 的一个在对偏微分方程理论的应用中常常很有效的不同形式可以通过限制出现在条件$(\widetilde{H}_1)$—$(\widetilde{H}_4)$ 中的集 B 是 Y 中的球而不是象我们上面假设的是 X 中的球而得到。对于这种条件的放松使我们必须付出的代价是要作以下进一步的假设。

$(\widetilde{H}_5)$ 对每一满足 $u(t)\in B$ 对于 $0\leqslant t\leqslant T$ 成立的 $u\in C([0,T]; X)$ 我们有

$$U_u(t,s)Y\subset Y \text{ 对于 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \text{ 成立} \qquad (4.19)$$

和对于 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$，$U_u(t,s)$ 在 Y 中是强连续的。

$(\widetilde{H}_6)$ Y 的闭凸有界子集在 X 中也是闭的。

我们注意如果 X 和 Y 是自反的 Banach 空间，则$(\widetilde{H}_6)$总是满足的，现在我们有

定理 4.6 设 $u_0\in Y$，$B=\{y: \|y-u_0\|_Y\leqslant r\}$，$r>0$。设 $\{A(t,b)\}$ 对于 $(t,b)\in[0,T]\times B$ 是一个满足假设 $(\widetilde{H}_1)$—

$(\widetilde{H}_6)$的线性算子族，如果 $A(t,b)u_0 \in Y$ 和

$$\|A(t,b)u_0\|_Y \leqslant k \text{ 对于 } (t,b) \in [0,T] \times B \text{ 成立}, \tag{4.20}$$

则存在 T'，$0 < T' \leqslant T$ 使得初值问题 (4.14) 有唯一的古典解 $u \in C([0,T'];B) \cap C'([0,T'];X)$。

证明 我们从证明 (4.14) 的唯一的 mild 解的存在性开始。我们首先注意从 $U_u(t,s)$ 的构造和$(\widetilde{H}_5)$得

$$\|U_u(t,s)\|_Y \leqslant C_1 \quad \text{对于 } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \tag{4.21}$$

和对每一在 B 中取值的 $u \in C([0,T'];X)$ 成立。在选取

$$T' = \min\left\{ T,\ \frac{1}{kC_1},\ \frac{1}{2}(C\|u_0\| + 1)^{-1} \right\} \tag{4.22}$$

以后，这里 C 是出现在引理 4.4 中的常数，我们考虑 $C([0,T'];X)$ 中的子集

$$\mathscr{I} = \{u:\ u \in C([0,T'];X), u(0) = u_0, u(t) \in B, 0 \leqslant t \leqslant T'\}.$$

由$(\widetilde{H}_6)$知$\mathscr{I}$是 $C([0,T'];X)$ 的一个闭凸子集。其次我们在 $\mathscr{I}$ 上定义映象

$$Fu(t) = U_u(t,0)u_0\text{，对于 } 0 \leqslant t \leqslant T', \tag{4.23}$$

并证明 F: $\mathscr{I} \to \mathscr{I}$。显然 $Fu(0) = u_0$ 和 $Fu(t) \in C([0,T'];X)$。由 $(\widetilde{H}_5)$ 得 $Fu(t) \in Y$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant T'$ 成立。剩下只须证明 $\|Fu(t) - u_0\|_Y \leqslant r$ 对于 $0 \leqslant t \leqslant T'$ 成立。在 X 中从 s 到 t 对 (4.10) 积分我们得到

$$U_u(t,0)u_0 - u_0 = \int_0^t U_u(t,\tau)A(\tau,u(\tau))u_0 d\tau\ . \tag{4.24}$$

在 Y 中估计 (4.24) 并利用 (4.20)，(4.21) 及 (4.22)得

$$\|Fu(t) - u_0\|_Y = \|U_u(t,0)u_0 - u_0\|_Y \leqslant C_1 kT \leqslant r\ .$$

因此 F：$\mathscr{I} \to \mathscr{I}$。现在恰如在定理 4.5 的证明中一样，对任何 $u_1, u_2 \in \mathscr{I}$，我们亦有

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_\infty ,$$

这里 $\|\cdot\|_\infty$ 是 $C([0,T'];X)$ 中的上确界范数。因此由压缩映象定理 F 有唯一的不动点 $u \in \mathscr{I}$，它是 (4.14) 在$[0,T']$上的 mild 解。但 $u(t) = U_u(t,0)u_0$。因此由 $(\widetilde{H}_5)$ 和定理 5.4.3，u 是线性发展方程

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + A(t,u)v = 0 \\ v(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.25}$$

的唯一的 Y-值解。于是 u 是 (4.14) 的一个古典解和 $u \in C([0,T'];Y) \cap C^1([0,T'];X)$。$u$ 的唯一性是显然的。证毕。

第七章　对线性偏微分方程的应用

§7.1 引　言

线性算子的半群理论已经在许多分析学科中得到应用，例如对于调和分析，逼近论，遍历理论和许多其它学科的应用可以在文献评注的开初所提及的一般教材中找到。

在本章以及下一章我们将只限于对有关偏微分方程的初值问题的解的应用。这两章的不同节间基本上是相互无关联的，并且每一节叙述了一个特殊的应用。偏微分方程一般理论的某些基本结果当需要时是叙述了，但不加证明。

在抽象理论的应用中，通常是指出一个给定的微分算子A在某具体的函数的 **Banach** 空间X中是一个 C_0 半群的无穷小生成元，这就为我们提供了在 **Banach** 空间 X 的意义下初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x) \\ u(o,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

的解的存在性和唯一性。如此得到的解 u 实际可能就是初值问题（1.1）的一个古典解。如果是这样，这通常经指出 u

有比由抽象理论所提供的正则性更高的正则性而得到证实。在这种正则性的证明中一个共同的工具是Sobolev 嵌入定理。在这一节的末尾将陈述它。

现在我们转到以后将用到的主要的具体**Banach**空间的描述，为此我们将使用以下记号：$x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)$ 是n维欧几里得空间R^n中的一个变点，对任意两个这种点$x=(x_1,\cdots,x_n)$ $y=(y_1,\cdots y_n)$我们令 $x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ 和 $|x|^2=x\cdot x$。

一个非负整数的 n 元向量$\alpha=(\alpha_1, \alpha_2\cdots, \alpha_n)$称为一个多重指标，并且我们定义

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

和对于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，定义

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

记$D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 和 $D=(D_1, D_2,\cdots,D_n)$ 我们有

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

设 Ω 是 R^n 中的一个固定区域，其边界和闭包分别是$\partial\Omega$和$\overline{\Omega}$。我们通常假设$\partial\Omega$是光滑的，这意味着对于某一个适当的 $k\geqslant1$，$\partial\Omega$ 是 C^k 类。回忆一下，$\partial\Omega$是 C^k 类，如果对每一点$x\in\partial\Omega$，存在一个中心在 x 的球B，使得对某 i，$\partial\Omega\cap B$ 能表成 $x_i=\varphi(x_1,\cdots x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$的形式，这里 φ 是 k 阶连续可微的。

我们用 $C^m(\Omega)$ $(C^m(\overline{\Omega}))$ 表示$\Omega(\overline{\Omega})$中所有$m$阶连续可微的实值（或有时是复值）函数的集合。$C_0^m(\Omega)$ 表示$C^m(\Omega)$的在Ω中有紧支集的所有函数的子空间。

对 $u\in C^m(\Omega)$和$1\leqslant p<\infty$我们定义

$$\|u\|_{m,p}=\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u|^p dx\right)^{1/p}. \tag{1.2}$$

如果 $p=2$ 和 u, $v\in C^m(\Omega)$我们亦定义

$$(u,v)_m=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}D^\alpha u\,\overline{D^\alpha v}\,dx. \tag{1.3}$$

用$\widetilde{C}_p^m(\Omega)$表示 $C^m(\Omega)$的满足 $\|u\|_{m,p}<\infty$ 的所有函数的子集，我们定义 $W^{m,p}(\Omega)$和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 分别是$\widetilde{C}_p^m(\Omega)$和 $C_0^m(\Omega)$依范数$\|\cdot\|_{m,p}$的完备化。

熟知 $W^{m,p}(\Omega)$ 和 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间并且显然$W_0^{m,p}(\Omega)\subset W^{m,p}(\Omega)$ 。对 $p=2$ 我们记 $W^{m,2}(\Omega)=H^m(\Omega)$和$W_0^{m,2}(\Omega)=H_0^m(\Omega)$。空间$H^m(\Omega)$和 $H_0^m(\Omega)$是 Hilbent 空间，具有由(1.3)给定的内积 $(\,,\,)_m$。

上述定义的空间 $W^{m,p}(\Omega)$由所有那些函数 $u\in L^p(\Omega)$ 组成，它的所有 $k\leqslant m$ 阶分布导数 $D^\alpha u\in L^p(\Omega)$。

如果 Ω 是有界区域，则 Hölder 不等式推出

$$W^{m,p}(\Omega)\subset W^{m,r}(\Omega)\ \text{对于}\ 1\leqslant r\leqslant p\ \text{成立} \tag{1.4}$$

和嵌入是连续的，而且我们有

定理1.1 设 Ω 是 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$（例如 $\partial\Omega$ 是 C^1 类）的有界区域，又设 $1\leqslant r$, $p<\infty$。如果 j, m 是整数使得 $0\leqslant j<m$ 和

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{r}+\frac{j}{n}-\frac{m}{n}. \tag{1.5}$$

则 $W^{m,r}(\Omega)\subset W^{j,p}(\Omega)$和嵌入是紧的。

空间 $W^{m,p}(\Omega)$和连续可微函数的空间 $C^k(\Omega)$以及可积函数的空间 $L^r(\Omega)$，$r\geqslant 1$ 之间的一些关系给出如下。

定理1.2 (Sobolev) 设Ω 是 R^n 中具有光滑边界$\partial\Omega$（例如 $\partial\Omega$ 是 C^m 类）的有界区域，则

$$W^{k,p}(\Omega)\subset L^{np/(n-kp)}(\Omega) \text{ 对于 } kp<n \text{ 成立。} \tag{1.6}$$

和

$$W^{k,p}(\Omega)\subset C^m(\overline{\Omega}),\text{ 对于 } 0\leqslant m<k-\frac{n}{p}\text{成立.} \tag{1.7}$$

此外存在常数 C_1 和 C_2 使得对任意 $u\in W^{m,p}(\Omega)$.

$$\|u\|_{0,np/(n-kp)}\leqslant C_1\|u\|_{k,p} \text{ 对于 } kp<n \text{ 成立.} \tag{1.8}$$

和

$$sup\{|D^\alpha u(x)|:|\alpha|\leqslant m,\ x\in\overline{\Omega}\}\leqslant C_2\|u\|_{k,p}.$$

$$\text{对于}0\leqslant m<k-\frac{n}{p}\text{成立.} \tag{1.9}$$

空间 $W_0^{k,p}(\Omega)$是$W^{k,p}(\Omega)$的在某种意义下在$\partial\Omega$ 上为零的元素的子空间，能够证明如果$\partial\Omega$是 C^k 类的和 $u\in C^{k-1}(\overline{\Omega})\cap W_0^{k,p}(\Omega)$，则 u 和其前 $k-1$ 阶法向导数在$\partial\Omega$上为零，因此$u\in W_0^{k,p}(\Omega)$.

§7.2 抛物方程——L^2 理论

设 Ω 是 R^n 中具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域。考虑$2m$ 阶微分算子

$$A(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{2.1}$$

这里系数 $a_\alpha(x)$ 是$\overline{\Omega}$ 中充分光滑的 x 的复值函数，$A(x, D)$ 的主要部分 $A'(x,D)$是算子

$$A'(x,D)=\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)D^\alpha. \tag{2.2}$$

定义2.1　算子$A(x,D)$是强椭园的，如果存在常数$C>0$使得

$$Re(-1)^m A'(x,\xi)\geq c|\xi|^{2m} \tag{2.3}$$

对所有 $x\in\overline{\Omega}$ 和 $\xi\in R^n$ 成立。

对于强椭园算子我们有以下重要估计。

定理2.2　(**Gårding 不等式**)如果 $A(x,D)$ 是一个$2m$阶的强椭园算子，则存在常数 $c_0>0$ 和 $\lambda_0\geq 0$ 使得对每一 $u\in H^{2m}(\Omega)\cap H_0^m(\Omega)$我们有

$$Re(Au,\ u)_0\geq c_0\|u\|_{m,2}^2-\lambda_0\|u\|_{0,2}^2. \tag{2.4}$$

Gårding 不等式的证明通常基于强椭园性的定义和 Fourier 变换的应用。对于某些简单情况它能通过分部积分

得到。例如考虑以下给出的算子$-\Delta$

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

显然$-\Delta$是强椭园的和对每一$u\in C_0^\infty(\Omega)$我们有

$$(-\Delta u,u)_0=-\int_\Omega u\Delta u dx=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u dx$$

$$=\|u\|_{1,2}^2-\|u\|_{0,2}^2, \tag{2.5}$$

这里第二个等式由分部积分得到,而最后的等式是范数$\|\cdot\|_{m,2}$的定义的一个直接推论。一个简单的极限论证表明对每一$u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$,(2.5)仍然保持和(2.4)对$-\Delta$成立。

设$A(x,D)$是$\overline{\Omega}$中具光滑系数$a_\alpha(x)$的一个$2m$阶强椭园算子,用分部积分法$(Au+\lambda u,\ v)$,对每一复数λ能延拓为$H_0^m(\Omega)\times H_0^m(\Omega)$上的一个连续的半双线性型。如果$Re\lambda\geqslant\lambda_0$,则Gårding不等式(2.4)推出它是强制的,因此我们可以应用经典的Lax—Milgram引理得出对每一$f\in L^2(\Omega)$和$Re\lambda\geqslant\lambda_0$边值问题

$$A(x,D)u+\lambda u=f \tag{2.6}$$

存在唯一的弱解$u\in H_0^m(\Omega)$。于是可以指出,但这不是容易的,(2.6)的弱解实际上满足$u\in H^{2m}(\Omega)$,因此我们有

定理2.3 设$A(x,D)$是$2m$阶强椭园的,则对每一满足$Re\ \lambda\geqslant\lambda_0$的$\lambda$和每一$f\in L^2(\Omega)$存在唯一的$u\in H^{2m}(\Omega)\cap H_0^m(\Omega)$满足方程

$$A(x,D)u+\lambda u=f.$$

对于有界区域$\Omega\subset R^n$上的一个给定的椭园算子$A(x,D)$

我们相应的有作用在Hilbert空间 $H=L^2(\Omega)$ 中的一个无界线性算子A，这是如下

定义2.4　设$A(x,D)=\sum\limits_{|\alpha|\leq 2m}c_\alpha(x)D^\alpha$ 在Ω中是强椭园的和令 $D(A)=H^{2m}(\Omega)\cap H_0^m(\Omega)$。对每一 $u\in D(A)$我们定义

$$Au=A(x,D)u.$$

对这个定义我们有

定理2.5　设$H=L^2(\Omega)$，A是如上定义的算子，则对每一满足$Re\lambda\geqslant\lambda_0$的$\lambda$，算子 $-A_\lambda=-(A+\lambda I)$是 $H=L^2(\Omega)$上的一个C_0 收缩半群的无穷小生成元，

证明　显然 $D(A_\lambda)=D(A)\supset C_0^\infty(\Omega)$。因为$C_0^\infty(\Omega)$在$H$中稠密，所以 $D(A_\lambda)$在H中稠密。又从 Gårding不等式我们有

$$Re(-A_\lambda u,u)_0\leqslant-c_0\|u\|_{m,2}^2+(\lambda_0-Re\lambda)\|u\|_{0,2}^2$$

因为 $Re\lambda\geqslant\lambda_0$，所以 $Re(-A_\lambda u,u)_0\leqslant 0$ 和 $-A_\lambda$ 是耗散的，最后如果 $Re\lambda\geqslant\lambda_0$，则对每一$\mu>0$，$\mu I+A_\lambda$的值域是整个$H$。这是定理2.3的一个直接推论。于是由定理1.4.3，$-A_\lambda$是$H=L^2(\Omega)$中的一个C_0 收缩半群的无穷小生成元。

定理2.5的一个直接推论是

推论2.6　设$A(x,D)$是在具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的 R^n 中的一个有界区域 Ω 上的 $2m$ 阶强椭园算子。则对每一 $u_0\in H^{2m}(\Omega)\cap H_0^m(\Omega)$，初值题问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}+A(x,D)u(t,x)=0, \text{ 在}\Omega\text{中}\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}\tag{2.7}$$

有唯一的解 $u(t,x)\in C^1([0,\infty);H^{2m}(\Omega)\cap H_0^m(\Omega))$。

定理2.5推出如果 $A(x,D)$是一个强椭园算子，则由定义2.5所定义的算子$-A$是 $H=L^2(\Omega)$ 上的一个C_0半群的无穷小生成元.实际上在这种情形有更多的结果成立，事实上我们有

定理2.7 如果$A(x,D)$是一个$2m$阶强椭园算子，则算子$-A$（由定义2.4给定）是 $H=L^2(\Omega)$ 上一个算子解析半群的无穷小生成元。

证明 设 $A_{\lambda_0}=A+\lambda_0 I$. 由 Gårding不等式我们有

$$Re(A_{\lambda_0}u,u)_0 \geqslant C_0\|u\|^2_{m,2} \tag{2.8}$$

对每一 $u\in D(A_{\lambda_0})$用一个简单的分部积分得

$$|Im(A_{\lambda_0}u,u)_0| \leqslant |(A_{\lambda_0}u,u)_0| \leqslant b\|u\|^2_{m,2} \tag{2.9}$$

对某常数 $b>0$ 成立. 由 (2.8) 和 (2.9) A_{λ_0} 的数值值域 $S(A_{\lambda_0})$满足

$$S(A_{\lambda_0})\subset S_1=\{\lambda: -\theta_1<arg\lambda<\theta_1\}, \tag{2.10}$$

这里 $\theta_1=\arctan(b/c_0)<\dfrac{\pi}{2}$. 选取 θ 使得$\theta_1<\theta<\dfrac{\pi}{2}$并记

$\Sigma_\theta=\{\lambda:|arg\lambda|>\theta\}$，则存在一个常数 C_θ 使得

$$d(\lambda;S(A_{\lambda_0}))\geqslant C_\theta|\lambda|, \quad \text{对一切}\lambda\in\Sigma_\theta\text{成立}, \tag{2.11}$$

这里 $d(\lambda;S)$ 表示 λ 和集 $S\subset C$ 间的距离，由定理2.3所有实数 μ, $\mu<0$在A_{λ_0}的预解集中，因此 Σ_θ 包含在 $\overline{S(A_{\lambda_0})}$的补集的一个分支中，它和 $\rho(A_{\lambda_0})$有一个非空的交，于是定理1.3.9.推出 $\rho(A_{\lambda_0})\supset\Sigma_\theta$ 和对每一 $\lambda\in\Sigma_\theta$，

$$\|R(\lambda;A_{\lambda_0})\|\leqslant d(\lambda;\overline{S(A_{\lambda_0})})^{-1}\leqslant\frac{1}{C_\theta|\lambda|}. \tag{2.12}$$

因此由定理2.5.2(c)，$-A_{\lambda_0}$是一个解析半群的无穷小生

成元，这就推出（如见推论3.2.2）$-A$是$L^2(\Omega)$上一个算子解析半群的无穷小生成元。

作为定理2.7和推论4.3.4的一个直接推论我们有

推论2.8 设$A(x,D)$是一个有界区域 $\Omega\subset R^n$中的$2m$阶强椭园算子，又设对每一$t\geqslant 0$，$f(t,x)\in L^2(\Omega)$。如果

$$\int_\Omega |f(t,x)-f(s,x)|^2dx\leqslant K|t-s|^{2\gamma}, \tag{2.13}$$

则对每一 $u_0(x)\in L^2(\Omega)$，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+A(x,D)u=f(t,u), & \text{在}\Omega\times R^+\text{中} \\ u(0,x)=u_0, & \text{在}\Omega\text{中}, \end{cases} \tag{2.14}$$

有唯一的解 $u(t,x)\in C^1((0,\infty), H^{2m}(\Omega)\cap H_0^m(\Omega))$.

注 2.9 值得注意的是如果算子A有常系数，则定理2.5和2.7对于区域 $\Omega=R^n$ 仍成立。这种特殊情形的证明容易用Fourier变换得到。

§7.3 抛物方程——L^p 理论

设 Ω 是 R^n 中具有光滑边界的有界区域。在上一节我们考虑了定义在 Hilbert 空间$L^2(\Omega)$中的半群，用 Banach 空间 $L^p(\Omega)$，$1\leqslant p<\infty$代替 Hilbert 空间 $L^2(\Omega)$是常有用的，这对于希望获得最优的正则性结果通常是重要的。在本节我们将在 $L^p(\Omega)$中讨论和强椭园微分算子相应的半群理论。在这一节的大部分我们将只限于 $1<p<\infty$。一些关于 $p=1$

和 $p=\infty$ 的注记将放在本节的末尾。

设 $1<p<\infty$ 和 Ω 是 R^n 中有光滑边界的一个有界区域，设

$$A(x,D)=\sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(x)D^\alpha u \tag{3.1}$$

是 Ω 中的一个强椭园微分算子，算子

$$A^*(x,D)u=\sum_{|\alpha|\leq 2m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\overline{a_\alpha(x)u}) \tag{3.2}$$

称为 $A(x,D)$ 的形式伴随。由强椭园性的定义显然如果 $A(x,D)$ 是强椭园的，则 $A^*(x,D)$ 亦然，自然 $A(x,D)$ 的系数 $a_\alpha(x)$ 被假设是足够光滑的，即 $a_\alpha(x)\in C^{2m}(\overline{\Omega})$ 或者 $a_\alpha(x)\in C^\infty(\overline{\Omega})$。然而许多结果在较弱的假设 $a_\alpha(x)\in L^\infty(\Omega)$，$0\leq|\alpha|<2m$ 和 $a_\alpha(x)\in C(\overline{\Omega})$，$|\alpha|=2m$ 下成立，对于强椭园微分算子已经建立了以下基本的 a-先验估计。

定理3.1 设 A 是 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 Ω 上的一个 $2m$ 阶强椭园算子，又设 $1<p<\infty$。则存在一个常数C使得

$$\|u\|_{2m,p}\leq C(\|Au\|_{0,p}+\|u\|_{0,p}) \tag{3.3}$$

对每一 $u\in W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$ 成立。

用这个先验估计和 S. Agmon 的方法就得到以下

定理3.2 设 A 是 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 Ω 上的一个 $2m$ 阶强椭园算子，又设 $1<p<\infty$。则存在常数 $C>0$，$R\geq 0$ 和 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 使得

$$\|u\|_{0,p} \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \|(\lambda I + A)u\|_{0,p} \tag{3.4}$$

对每一 $u \in W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ 和满足 $|\lambda| \geqslant R$，$\theta - \pi < \arg\lambda < \pi - \theta$ 的 $\lambda \in \mathbf{C}$ 成立。

对于一个强椭园算子 $A(x,D)$ 我们相应地有 $L^p(\Omega)$ 中的一个线性（无界的）算子 A_p 如下：

定义3.3 设 $A = A(x,D)$ 是 R^n 中的有界区域 Ω 上的一个 $2m$ 阶强椭园微分算子，又设 $1 < p < \infty$。

命

$$D(A_p) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega) \tag{3.5}$$

和

$$A_p u = A(x,D)u, \text{ 对于 } u \in D(A_p). \tag{3.6}$$

A_p 的定义域 $D(A_p)$ 包含 $C_0^\infty(\Omega)$，因此它在 $L^p(\Omega)$ 中稠密，而且由定理3.1容易推出 A_p 在 $L^p(\Omega)$ 中是一个闭算子。

引理3.4 设 $A(x,D)$ 是 Ω 上一个 $2m$ 阶强椭园算子，又设 A_p，$1 < p < \infty$ 是相应的由定义3.3 定义的算子，则由定义3.3定义的在 $L^q(\Omega)$ 上相应于 $A(x,D)$ 的形式伴随 $A^*(x,D)$ 的算子 A^*_q，$q = \frac{p}{p-1}$ 是 A_p 的伴随算子。

证明 我们用 $\langle , \rangle$ 表示对偶空间 $L^p(\Omega)$ 和 $L^q(\Omega)$ 之间的对偶积，用 A' 表示A的伴随。用一个简单的分部积分得

$$\langle A_p u, v \rangle = \langle u, A^*_q v \rangle \tag{3.7}$$

对每一 $u \in D(A_p)$ 和 $v \in D(A^*_q)$ 成立，因此 $D(A^*_q) \subset D(A')$ 和 $A^*_q v = A' v$ 对于 $v \in D(A^*_q)$ 成立。设 $v \in D(A')$ 和 $w = A' v$。则由伴随算子的定义我们有

$$\langle A_p u, v\rangle = \langle u, w\rangle,\ 对所有\ u\in D(A_p)成立 \tag{3.8}$$

因为 $D(A^*_q)$在 $L^q(\Omega)$中稠密，所以存在一个序列$v_l\in D(A^*_q)$使得在 $L^q(\Omega)$中 $v_l\to v$。由 (3.7) 和 (3.8) 对所有$u\in D(A_p)$ $\langle u, A^*_q v_l\rangle\to\langle u,w\rangle$。因为 $D(A_p)$ 在$L^p(\Omega)$中稠密，所以我们得到 $A^*_q v_l$ 弱收敛到w。现在 A^*_q 的闭性推出 $v\in D(A^*_q)$。因此 $D(A')\subset D(A^*_q)$，故 $A' = A^*_q$。

由定理3.1和3.2我们推出

定理3.5　设$A(x,D)$是 R^n 中具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域Ω上的一个$2m$阶强椭园算子，又设 $1<p<\infty$。如果 A_p 是由定义3.3定义的相应于A的算子，则 $-A_p$是 $L^p(\Omega)$上一个解析半群的无穷小生成元。

证明　我们已经注意到 $D(A_p)$在 $L^p(\Omega)$中稠密和 A_p 是$L^p(\Omega)$中一个闭算子，由定理3.2，对每一

$$\lambda\in\Sigma_\theta=\{\mu:\ \theta-\pi<\arg\mu<\pi-\theta,\ |\mu|\geq R\}, \tag{3.9}$$

算子 $\lambda I+A_p$ 是一对一的和有闭值域。类似地，将定理3.2应用到 $L^q(\Omega)$上的算子 A^*_q，则存在常数 $R'\geq 0$ 和$0<\theta'<\frac{\pi}{2}$使得对每一 $\lambda\in\Sigma_{\theta'}=\{\mu:\ \theta'-\pi<\arg\mu<\pi-\theta',\ |\mu|\geq R^1\}$，$\overline{\lambda}I+A^*_q$是一对一的。设$\theta_1=\min(\theta,\theta')$和 $R_1=\max(R, R')$，则对每一

$$\lambda\in\Sigma_1=\{\mu:\ \theta_1-\pi<\arg\mu<\pi-\theta_1,\ |\mu|\geq R_1\}$$

$\lambda I+A_p$ 是一对一的和到上的。事实上我们已经看到它是一对一的，因此剩下仅须证明它是到上的。设 $\lambda\in\Sigma_{\theta_1}$。如果对所有 $u\in D(A_p)$，$v\in L^q(\Omega)$满足$\langle(\lambda I+A_p)u,v\rangle=0$，则由引理3.4知 $v\in D(A^*_q)$和$\langle u, (\overline{\lambda}I+A^*_q)v=0$对所有 $u\in D(A_p)$

成立。因为 $D(A_p)$在 $L^p(\Omega)$中稠密，所以 $(\overline{\lambda}I+A^*_q)v=0$。并且$\overline{\lambda}I+A^*_q$ 的一对一的映射性推出。$v=0$。因此对 $\lambda\in\Sigma_1$，$\lambda I+A_p$ 是可逆的和由(3.4)得

$$\|(\lambda I+A_p)^{-1}\|\leqslant\frac{C}{|\lambda|}, \text{对所有 } \lambda\in\Sigma_{\theta_1}\text{成立。}$$

于是由定理2.5.2(c)推出$-A_p$ 是 $L^p(\Omega)$中一个解析半群的无穷小生成元。

定理3.5是基于深刻的 L^p 先验估计 (3.3)。对于实系数的散度形式的二阶强椭园算子，定理3.5可以不用定理3.1和3.2而直接证明，这如下面所作。

设 Ω 是 R^n 中具有光滑边界的有界区域，$A(x,D)$ 是对称的二阶微分算子：

$$A(x,D)u=-\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{k,l}(x)\frac{\partial u}{\partial x_l}\right). \tag{3.10}$$

我们假设系数 $a_{k,l}(x)=a_{l,k}(x)$是实值的和在$\overline{\Omega}$中是连续可微的以及$A(x,D)$是强椭园的，即存在常数 $C_0>0$使得

$$\sum_{k,l=1}^{n}a_{k,l}(x)\xi_k\xi_l\geqslant C_0\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2=C_0|\xi|^2 \tag{3.11}$$

对所有 ξ_k，$1\leqslant k\leqslant n$ 成立。

同(3.10)给出的 $2n$阶对称的微分算子 $A(x,D)$相对应，我们有由定义3.3在$L^p(\Omega)$，$1<p<\infty$上所定义的算子A_p。于是我们有

定理3.6 设 $1<p<\infty$，则$-A$是 $L^p(\Omega)$ 中的收缩解析

半群的无穷小生成元。

证明 设 $1<p<\infty$ 是固定的，令 $q=\dfrac{p}{p-1}$. 我们用 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示 $L^p(\Omega)$ 和 $L^q(\Omega)$ 之间的对偶积。如果 $u\in D(A_p)$，则函数 $u^*=|u|^{p-2}\bar{u}\in L^q(\Omega)$ 和 $\langle u,v^*\rangle=\|u\|_{0,p}^{2}$. 由分部积分得

$$\langle A_p u,u^*\rangle=-\int_\Omega\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{k,l}\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)\bar{u}|u|^{p-2}dx$$

$$=\int_\Omega\sum_{k,l=1}^{n}a_{k,l}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{u}|u|^{p-2})dx$$

$$=\int_\Omega\sum_{k,l=1}^{n}a_{k,l}\left(|u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k}+\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x_l}\frac{\partial|u|^{p-2}}{\partial x_k}\right)dx\ .$$

但

$$\frac{\partial}{\partial x_k}|u|^{p-2}=\frac{1}{2}(p-2)|u|^{p-4}\left(\bar{u}\frac{\partial u}{\partial x_k}+u\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_k}\right).$$

记 $|u|^{\frac{p-4}{2}}\bar{u}\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=\alpha_k+i\beta_k$，经过简单计算我们得到

$$\langle A_p u,u^*\rangle=\int_\Omega\sum_{k,l=1}^{n}a_{k,l}((p-1)\alpha_k\alpha_l+\beta_k\beta_l$$

$$+i(p-2)\alpha_k\alpha_l)dx.$$

设 $|a_{k,l}(x)|\leqslant M$ 对于 $1\leqslant k,\ l\leqslant n$ 和 $x\in\bar{\Omega}$ 成立，并命

$$|\alpha|^2=\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega\alpha_k^2dx,\qquad|\beta|^2=\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega\beta_k^2dx.$$

则由 (3.11) 和 (3.12) 易得

$$Re\langle A_p u, u^*\rangle \geqslant C_0((p-1)|\alpha|^2+|\beta|^2)\geqslant 0 \tag{3.13}$$

和

$$\frac{|Im\langle A_p u,u^*\rangle|}{|Re\langle A_p u,u^*\rangle|}\leqslant\frac{|p-2|M\left(\dfrac{\rho}{2}|\alpha|^2+\dfrac{1}{2\rho}|\beta|^2\right)}{C_0((p-1)|\alpha|^2+|\beta|^2)} \tag{3.14}$$

对每一$\rho>0$成立。在（3.14）中选取 $\rho=\sqrt{p-1}$ 得

$$\frac{|Im\langle A_p u,u^*\rangle|}{|Re\langle A_p u,u^*\rangle|}\leqslant\frac{M|p-2|}{2C_0\sqrt{p-1}} \tag{3.15}$$

由（3.13），对每一 $\lambda>0$ 和 $u\in D(A_p)$我们有

$$\lambda\|u\|_{0,p}\leqslant\|(\lambda I+A_p)u\|_{0,p}. \tag{3.16}$$

因此$\lambda I+A_p$是一对一的和对每一$\lambda>0$有闭值域。因为(3.16)对每一 $1<p<\infty$ 成立，所以对 $\lambda>0$，$\lambda I+A_p$ 也是到上的。事实上，如果 $v\in L^q(\Omega)$对所有 $u\in D(A_p)$ 满足$\langle(\lambda I+A_p)u,v\rangle=0$，则因为 $A(x,D)$ 是形式自伴的，所以由（3.4）知 $v\in D(A_q)$，$q=\dfrac{p}{p-1}$ 和对每一 $u\in D(A_p)$，$\langle u,(\bar{\lambda}I+A_q)v\rangle=0$。因为 $D(A_p)$在$L^p(\Omega)$中稠密，所以 $(\bar{\lambda}I+A_q)v=0$和在(3.16）中用 q 代替 p 推出 $v=0$。因此 $\lambda I+A_p$ 对 $\lambda>0$是一对一的和到上的。作为（3.16）的一个推论我们有

$$\|(\lambda I+A_p)^{-1}\|_{0,p}\leqslant\frac{1}{\lambda}\text{，对于 }\lambda>0\text{ 成立。} \tag{3.17}$$

现在 Hille—Yosida 定理（定理1.3.1）推出 $-A_p$ 对每一 $1<p<\infty$ 在 $L^p(\Omega)$上是一个收缩半群的无穷小生成元。最后

为了证明由 $-A_p$ 生成的半群是解析的我们注意 由 (3.13) 和 (3.15)，$-A_p$ 的数值值域 $S(-A_p)$ 包含在集 $S_{\pi_1}=\{\lambda: |\arg\lambda|>\pi-\theta_1\}$ 中，这里 $\theta_1=\arctan(M|p-2|/2C_0\sqrt{p-1})$，$0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$。选取 $\theta_1<\theta<\frac{\pi}{2}$，并记

$$\Sigma_\theta=\{\lambda;\ |\mathrm{aeg}\lambda|<\pi-\theta\}. \tag{3.18}$$

于是存在一个常数 $C_\theta>0$ 使得

$$d(\lambda;\ \overline{S(-A_p)})\geqslant C_\theta|\lambda|，对于\ \lambda\in\Sigma_\theta\ 成立$$

因为由证明的第一部分 $\lambda>0$ 是在 $-A_p$ 的预解集$\rho(-A_p)$中，所以由定理1.3.9得 $\rho(-A_p)\supset\Sigma$ 和

$$\|(\lambda I+A_p)^{-1}\|_{0,p}\leqslant\frac{1}{C_\theta|\lambda|}.\ 对于\lambda\in\Sigma_\theta成立. \tag{3.19}$$

因此由定理2.5.2(c)，$-A_p$是 $L^p(\Omega)$ 上的一个解析半群的无穷小生成元。

现在我们转到 $p=1$ 和 $p=\infty$ 的情况，并从 $p=\infty$ 开始。回忆一下，$L^\infty(\Omega)$中的范数是

$$\|u\|_{0,\infty}=\operatorname{esssup}\{|u(x)|:\ x\in\Omega\}.$$

设 $A(x,D)$是由 (3.1) 给出的定义在具有光滑边界$\partial\Omega$ 的有界区域 $\Omega\subset R^n$ 上的$2m$阶一致椭圆算子，我们将 $A(x,D)$对应于 $L^\infty(\Omega)$上的一个算子 A_∞如下：

$$\begin{aligned}D(A_\infty)=\{u:\ &u\in W^{2m,p}(\Omega)，对一切p>n,\\ &A(x,D)u\in L^\infty(\Omega)，在\partial\Omega上对0\leqslant|\beta|<m有D^\beta u=0\}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

和

$$A_\infty u=A(x,D)u，对于\ u\in D(A_\infty) \tag{3.21}$$

我们首先注意由 Sobolev 定理（定理 1.2）得 $D(A_\infty) \subset C^{2m-1}(\overline{\Omega})$。因此由我们的$\partial\Omega$光滑的假设知条件 $D^\beta u=0$，$0\leqslant|\beta|<m$ 在$\partial\Omega$上有意义，而且由边界的正则性和 $D(A_\infty)$ 的定义，对每一 $p>n$，$D(A_\infty)\subset W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$。因此由定理3.2存在常数，$C>0$，$R\geqslant 0$ 和$0<\theta<\frac{\pi}{2}$使得

$$\|u\|_{0,\infty}\leqslant\frac{C}{|\lambda|}\|(\lambda I+A_\infty)u\|_{0,\infty} \tag{3.22}$$

对每一 $u\in D(A_\infty)$ 和满足 $|\lambda|\geqslant R$，$\theta-\pi<\arg\lambda<\pi-\theta$ 的 $\lambda\in C$ 成立，估计（3.22）通过在（3.4）中让$p\to\infty$ 得到。由(3.22)知 $\lambda I+A_\infty$ 是一对一的和对于满足$|\lambda|\geqslant R$，$\theta-\pi<\arg\lambda<\pi-\theta$ 的 $\lambda\in C$ 有闭值域，但 $-A_\infty$不是 $L^\infty(\Omega)$ 上一个 C_0 算子半群的无穷小生成元。事实上，在上面我们已经注意到 $D(A_\infty)\subset C(\overline{\Omega})$。因此也有$\overline{D(A_\infty)}\subset C(\overline{\Omega})$，这里$\overline{D(A_\infty)}$是 $D(A_\infty)$ 依范数$\|\cdot\|_{0,\infty}$的闭包，因为 $C(\overline{\Omega})$ 不在 $L^\infty(\Omega)$中稠密，所以 $D(A_\infty)$不能在 $C^\infty(\Omega)$中稠密。

为了克服这种困难我们仅限于在$\overline{\Omega}$上的连续函数空间进行讨论，我们定义

$$D(A_c)=\{u:\ u\in D(A_\infty),\ A(x,D)u\in C(\overline{\Omega}),\ A(x,D)u=0\ 在\partial\Omega上\} \tag{3.23}$$

和

$$A_c u=A(x,D)u,\ 对于\ u\in D(A_c)。 \tag{3.24}$$

因此所定义的算子 A_c 被视为是空间

$$C=\{u:\ u\in C(\overline{\Omega}),\ u=0在\partial\Omega上\} \tag{3.25}$$

上的一个算子，我们有

定理3.7 算子 $-A_E$ 是 C 上的一个解析半群的无穷小生成元。

定理3.7的证明基于一个类似于估计（3.3）的依范数 $\|\cdot\|_{k,\infty}$ 的先验估计。因为对 $p=1$ 我们没有这种先验估计，所以对于这种情形的结果将要用一种困难的方法推导，这将利用连续函数和 L^1 函数之间的对偶性，首先我们有一个引理。

引理3.8 设 Ω 是 R^n 中一个有界区域，对于 $u\in L^1(\Omega)$ 我们有

$$\|u\|_{0,1}=\sup\left\{\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx:\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega),\|\varphi\|_{0,\infty}\leqslant 1\right\}. \tag{3.26}$$

证明 因为对每一满足 $\|\varphi\|_{0,\infty}\leqslant 1$ 的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 我们有

$$\left|\int_\Omega u\varphi dx\right|\leqslant\|\varphi\|_{0,\infty}\|u\|_{0,1}\leqslant\|u\|_{0,1}$$

所以(3.26)右端的上确界显然是小于或等于 $\|u\|_{0,1}$. 因为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中稠密，所以我们只须对 $u\in C_0^\infty(\Omega)$ 证明结果. 命 $p_n(z)\in C^\infty(C)$ 使得 $p_n(0)=0$, $|p_n(z)|\leqslant 1$ 和 $p_n(z)=\bar{z}/|z|$ 对于 $|z|\geqslant\frac{1}{n}$. 则 $p_n(u(x))\in C_0^\infty(\Omega)$ 和 $\|p_n(u(x))\|_{0,\infty}\leqslant 1$. 又

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega u(x)p_n(u(x))dx=\int_\Omega|u(x)|dx=\|u\|_{0,1}$$

所以（3.26）右端的是大于或等于 $\|u\|_{0,1}$.

现在我们转到空间 $L^1(\Omega)$ 上对应于由（3.1）给出的强

椭园算子 $A(x,D)$的算子A的定义。

定义3.9 设 $A(x,D)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域 $\Omega\subset R^n$ 上的由 (3.1) 给定 $2m$ 阶强椭园算子。命

$$D(A_1)=\{u;\ u\in W^{2m-1,1}(\Omega)\cap W_0^{m,1}(\Omega),$$
$$A(x,D)u\in L^1(\Omega)\} \qquad (3.27)$$

这里 $A(x,D)u$ 理解为在分布的意义下。对 $u\in D(A_1)$ ，A_1 定义为

$$A_1u=A(x,D)u. \qquad (3.28)$$

定理3.10 $-A_1$ 是 $L^1(\Omega)$上的一个解析半群的无穷小生成元。

证明 设

$$A(x,D)u=\sum_{|\alpha|\le 2m}a_\alpha(x)D^\alpha u$$

和

$$\widetilde{A}(x,D)=\sum_{|\alpha|\le 2m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha(x)u).$$

设$\widetilde{A}_\varepsilon$是空间$C$（由 (3.2.5)给定）上对应于$\widetilde{A}(x,D)$的算子，由于$\widetilde{A}(x,D)$连同 $A(x,D)$的强椭园性，由定理3.7知$-\widetilde{A}_\varepsilon$是$C$ 上的一个解析半群的无穷小生成元。则由定理2.5.2 推出存在常数 $M>0$，$R\geqslant0$和$0<\theta<\frac{\pi}{2}$使得

$$\|(\lambda I+\widetilde{A}_\varepsilon)^{-1}\|_{0,\infty}\leqslant M|\lambda|^{-1} \qquad (3.29)$$

对每一 $\lambda\in\Sigma_\theta=\{\mu:\ |\arg\mu|>\theta,\ |\mu|\geqslant R\}$ 成立。现在设 $u\in D(A_1)$。由引理3.8,

$$\|u\|_{0,1}=\sup\left\{\int_{\Omega}u\varphi dx:\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega),\ \|\varphi\|_{0,\infty}\leqslant 1\right\} \tag{3.30}$$

因为对每一 $\lambda\in\Sigma$ ，$C_0^\infty(\Omega)$包含在$\lambda I+\widetilde{A}_2$的值域中，所以由（3.29）和（3.30）

$$\|u\|_{0,1}=\sup\left\{\int_{\Omega}u(\lambda I+\widetilde{A}_2)\nu dx:\ \nu\in D(\widetilde{A}_2),\ \|\nu\|_{0,\infty}\leqslant M|\lambda|^{-1}\right\}.$$

这就推出对每一 $\lambda\in D(\widetilde{A}_2)$，$\|\nu\|_{0,\infty}\leqslant M|\lambda|^{-1}$。我们有

$$\|u\|_{0,1}\leqslant\left|\int_{\Omega}u(\lambda I+\widetilde{A}_2)\nu\, dx\right|=\left|\int_{\Omega}(\lambda I+A_1)u\nu dx\right|$$

$$\leqslant\|(\lambda I+A_1)u\|_{0,1}\|\nu\|_{0,\infty}\leqslant M|\lambda|^{-1}\|(\lambda I+A_1)u\|_{0,1}.$$

于是对每一 $\lambda\in\Sigma$，$\lambda I+A_1$ 是一对一的和有闭值区域。而且，因为 $D(A_2)\subset D(A_1)$，所以 $\lambda I+A_1$ 的值域包含 $L^2(\Omega)$，而 $L^2(\Omega)$ 在 $L^1(\Omega)$ 中稠密，从而 $\lambda I+A_1$ 的值域是整个 $L^1(\Omega)$和

$$\|(\lambda I+A_1)^{-1}\|_{0,1}\leqslant M|\lambda|^{-1}$$

对每一 $\lambda\in\Sigma$ 成立。因此由定理2.5.2得 $-A_1$ 是$L^1(\Omega)$上的一个解析半群的无穷小生成元。

§7.4 波动方程

在本节我们考虑 R^n 中的波动方程的初值问题，即初

值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u, \text{ 对于 } x\in R^n, \ t>0, \qquad \text{对于} x\in R^n, \ t>0$$

$$u(0,x)=u_1(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=u_2(x), \text{ 对于} x\in R^n. \qquad (4.1)$$

这个问题等价于一阶系统：

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \text{ 对于} x\in R^n, \ t>0 \qquad (4.2)$$

和

$$\begin{pmatrix} u_1(0,x) \\ u_2(0,x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \text{ 对于 } x\in R^n.$$

为了应用半群理论我们的兴趣在于指出算子$\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$在某个适当选取的函数的 **Banach**空间中是一个C_0算子半群的无穷小生成元，结果表明最适合的空间是 **Hilbert** 空间 $H^1(R^n)\times L^2(R^n)$。

空间 $H^k(R^n)$已经在7.1节中定义，对于 $\Omega=R^n$ 的特殊情况,它们能用以下有用的方法刻划其特征：设 $f\in L^2(R^n)$和

$$\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi}f(x)dx \qquad (4.3)$$

是其 **Fourier** 变换。函数 $f\in H^k(R^n)$当且仅当 $(1+|\xi|)^{k/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(R^n)$。这个特征是 **Parseval** 等式和 **Fourier** 变换的基本性质的一个简单推论。

给定一个向量 $U=[u_1,u_2]\in C_0^\infty(R^n)\times C_0^\infty(R^n)$ 我们定义

范数

$$|||U||| = |||[u_1,u_2]||| = \left(\int_{R^n} (|u_1|^2 + |\nabla u_1|^2 + |u_2|^2)\,dx\right)^{1/2}. \tag{4.4}$$

容易验证 $C_0^\infty(R^n)\times C_0^\infty(R^n)$ 关于范数 $|||\cdot|||$ 的完备化是 Hilbert 空间 $H = H^1(R^n)\times L^2(R^n)$。在这个Hilbert 空间中我们定义和微分算子$\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$相关的算子$A$如下：

定义4.1 设

$$D(A) = H^2(R^n)\times H^1(R^n) \tag{4.5}$$

和对 $U = [u_1,u_2]\in D(A)$ 命

$$AU = A[u_1,u_2] = [u_2,\Delta u_1]. \tag{4.6}$$

为了证明由（4.5），（4.6）定义的算子A是H上一个C_0算子群的无穷小生成元，我们需要作以下简单的准备。

引理4.2 如果 $\nu>0$ 和 $f\in H^k(R^n)$，$k\geqslant 0$，则存在唯一的函数 $u\in H^{k+2}(R^n)$满足

$$u - \nu\Delta u = f. \tag{4.7}$$

证明 设$\hat{f}(\xi)$是 f 的 Fourier 变换，$\tilde{u}(\xi) = (1+\nu|\xi|^2)^{-1}\hat{f}(\xi)$。因为 $f\in H^k(R^n)$，所以$(1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(R^n)$。因此 $(1+|\xi|^2)^{(k+2)/2}\tilde{u}(\xi)\in L^2(R^n)$。如果定义 u 如下

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} e^{ix\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)\,d\xi$$

则 $u\in H^{k+2}(R^n)$和 u 是（4.7）的一个解。（4.7）的解 u 的唯一性从这样的事实推出：如果 $w\in H^{k+2}(R^n)$ 满足$w-\nu\Delta$

$w=0$，则$\widehat{w}=0$。因此$w=0$。

引理4.3　对每一 $F=[f_1,f_2]\in C_0^\infty(R^n)\times C_0^\infty(R^n)$ 和实数 $\lambda\neq0$，方程

$$U-\lambda AU=F$$

对每一 $k\geqslant2$ 有唯一的解 $U=[u_1,u_2]\in H^k(R^n)\times H^{k-2}(R^n)$。而且

$$|||U|||\leqslant(1-2|\lambda|)^{-1}|||F|||，对于\ 0<|\lambda|<\frac{1}{2}成立。\quad(4.9)$$

证明　设 $\lambda\neq0$ 是实的和 w_1，w_2是

$$w_i-\lambda^2\Delta w_i=f_i,\qquad i=1,\ 2\qquad(4.10)$$

的解。由引理4.2，显然这种解存在和对每一 $k\geqslant0$，$w_i\in H^k(R^n)$，命$u_1=w_1+\lambda w_2$，$u_2=w_2+\lambda\Delta w_1$。容易验证$U=[u_1,u_2]$是（4.8）的一个解，因此 $u_1-\lambda u_2=f_1$ 和 $u_2-\lambda\Delta u_1=f_2$。而且对每一 $k\geqslant2$，$U\in H^k(R^n)\times H^{k-2}(R^n)$。记（，）为$L^2(R^n)$中的内积，我们有

$$\begin{aligned}|||F|||^2&=(f_1-\Delta f_1,\ f_1)_0+(f_2,\ f_2)_0\\&=(u_1-\lambda u_2-\Delta u_1+\lambda\Delta u_2,\ u_1-\lambda u_2)_0\\&\quad+(u_2-\lambda\Delta u_1,\ u_2-\lambda\Delta u_1)_0\\&\geqslant(u_1-\Delta u_1,u_1)_0+\|u_2\|_{0,2}^2-2|\lambda|Re(u_1,u_2)_0\\&\geqslant(1-\cdot|\lambda|)|||U|||^2\end{aligned}$$

因此如果 $0<|\lambda|<\frac{1}{2}$，则

$$|||F|||^2\geqslant(1-2|\lambda|)^2|||U|||^2.\qquad(4.11)$$

引理4.3表明对所有满足 $0<|\lambda|<\frac{1}{2}$的实的 λ，算子 $I-\lambda A$ 的值域包含 $C_0^\infty(R^n)\times C_0^\infty(R^n)$。因为由定义 4.1 定义

的算子 A 是闭的，所以 $I-\lambda A$ 的值域是整个 $H=H^1(R^n)\times L^2(R^n)$，并且我们有

推论4.4 对每一 $F\in H^1(R^n)\times L^2(R^n)$ 和满足 $0<|\lambda|<\frac{1}{2}$ 的实的λ，方程

$$U-\lambda AU=F \tag{4.12}$$

有唯一的解 $U\in H^2(R^n)\times H^1(R^n)$ 和

$$\|U\|\leqslant(1-2|\lambda|)^{-1}\|F\|。 \tag{4.13}$$

定理4.5 由定义 4.1 定义的算子 A 是 $H=H^1(R^n)\times L^2(R^n)$ 上满足

$$\|T(t)\|\leqslant e^{2|t|} \tag{4.14}$$

的一个 C_0 群 $T(t)$ 的无穷小生成元。

证明 A的定义域 $H^2(R^n)\times H^1(R^n)$显然在H中稠密，由推论4.4知 $(\mu I-A)^{-1}$ 对 $|\mu|>2$ 存在并满足

$$\|(\mu I-A)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|\mu|-2}，\text{对于 } |\mu|>2\text{成立，} \tag{4.15}$$

由定理1.6.3，A是一个满足（4.14）的群$T(t)$的无穷小生成元。

推论4.6 对每一 $f_1\in H^2(R^n)$，$f_2\in H^1(R^n)$ 存在唯一的 $u(t,x)\in C^1([0,\infty):H^2(R^n))$满足初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u,\\ u(0,x)=f_1(x),\\ u'_t(0,x)=f_2(x),\end{cases} \tag{4.16}$$

证明 设 $T(t)$是由 A 生成的半群，命

$$[u_1(t,x),u_2(t,x)]=T(t)[f_1(x),f_2(x)],$$

则

$$\frac{\partial}{\partial t}[u_1,u_2]=A[u_1,u_2]=[v_2,\Delta u_1].$$

故 u_1 是所期待的解。

我们通过证明在初值问题（4.6）中如果初值 f_1,f_2 是光滑的，则解也是光滑的来结束本节。为此我们注意，**Sobolev** 定理（定理1.2）可以推广到特殊的无界区域 $\Omega=R^n$ 如下：

定理4.7 对 $0\leqslant m<k-n/2$ 我们有

$$H^k(R^n)\subset C^m(R^n). \tag{4.17}$$

证明 设 $\nu\in C_0^\infty(R^n)$，则如熟知的 $\xi^\alpha\hat{\nu}(\xi)\in L^2(R^n)$ 对每一 α 成立和

$$D^\alpha\nu(x)=(2\pi)^{-(n/2)}\int_{R^n}i^{|\alpha|}\xi^\alpha e^{ix\cdot\xi}\hat{\nu}(\xi)d\xi.$$

用 **Cauchy—Schwartz** 不等式估计 $D^\alpha\nu(x)$ 我们得到对每一 $N>\frac{n}{2}$，

$$|D^\alpha\nu(x)|^2\leqslant(2\pi)^{-n}\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-N}d\xi$$

$$\int_{R^n}|\xi|^{2|\alpha|}(1+|\xi|^2)^N|\hat{\nu}(\xi)|^2d\xi$$

$$\leqslant C_1\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{N+|\alpha|}|\hat{\nu}(\xi)|^2d\xi\leqslant C_2\|\nu\|^2_{N+|\alpha|,2} \tag{4.18}$$

这里 C_1 和 C_2 是依赖于 N 和 $|\alpha|$ 的常数设。$u\in H^k(R^n)$ 和 $u_n\in C_0^\infty(R^n)$ 使得在 $H^k(R^n)$ 中 $u_n\to u$。于是由（4.18）对所有满足 $|\alpha|\leqslant m<k-n/2$ 的 α，$D^\alpha u_n\to D^\alpha u$ 在 R^n 中一致成立。因此 $u\in C^m(R^n)$，这就是所希望的，

现在考虑具有 f_1，$f_2\in C_0^\infty(R^n)$ 的初值问题（4.16）．显然对每一 $k\geqslant 1$，$[f_1, f_2]\in D(A^k)$，这里 A 是定义 4.1 中所定义的算子。因此对每一 $k\geqslant 1$，$[u_1, u_2]=T(t)[f_1, f_2]\in D(A^k)$。特别对所有 $k\geqslant 0, \Delta^k u_1\in L^2(R^n)$，由此推出对每一 $k\geqslant 0$，$u_1\in H^k(R^n)$ 和由定理 4.8 推出对每一 $t\geqslant 0$，(4.16)的解 $u_1(t)$ 满足 $u_1(t,x)\in C^\infty(R^n)$。再做些计算，实际上可以证明 $u_1(t,x)\in C^\infty(R\times R^n)$ 和它是（4.16)的一个古典的光滑解，但我们在这里不再赘述。

§7.5 一个Schrödinger方程

Schrödinger 方程给出如下：

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u-Vu, \tag{5.1}$$

这里函数 V 称为位势。我们将在Hilbert空间 $H=L^2(\Omega)$ 中考虑这个方程。我们首先定义对应于微分算子 $i\Delta$ 的算子 A_0。

定义5.1 设 $D(A_0)=H^2(R^n)$，这里 $H^2(R^n)$ 是在 7.1 节中定义的。对 $u\in D(A_0)$，设

$$A_0u=i\Delta u. \tag{5.2}$$

引理5.2 算子 iA_0 在 $L^2(R^n)$ 中是自伴的.

证明 用分部积分法得

$$(-\Delta u,v)_0=-\int_{R^n}\Delta u\cdot\overline{v}\,dx=-\int_{R^n}u\overline{\Delta v}\,dx=(u,-v)_0,$$

因此 $iA_0=-\Delta$ 是对称的。为证明它是自伴的，只须证明对每一 λ，$Im\lambda\neq0$，$\lambda I-iA_0$ 的值域在 $L^2(R^n)$ 中是稠密的。但如果 $f\in C_0^\infty(R^n)$，则用 Fourier 变换得

$$u(x)=(2\pi)^{-(n/2)}\int_{R^n}\frac{\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}}{\lambda+|\xi|^2}d\xi \tag{5.3}$$

是在 $D(A_0)=H^2(R^n)$ 中，因此它是 $(\lambda I-iA_0)u=f$ 的解。从而 $\lambda I-iA_0$ 的值域包含 $C_0^\infty(R^n)$。所以它在 $L^2(R^n)$ 中稠密。

现在由 **Stone** 定理（定理1.10.8）我们有

推论5.3 A_0 是 $L^2(R^n)$ 上酉算子群的无穷小生成元。

其次我们处理位势 V。为此我们在 $L^2(R^n)$ 中定义一个算子 V 如下

$$D(V)=\{u: u\in L^2(R^n),\ Vu\in L^2(R^n)\}$$

和对于 $u\in D(V)$，$Vu=V(x)u(x)$。

引理5.4 设 $V(x)\in L^p(R^n)$。如果 $p>\frac{n}{2}$ 和 $p>2$，则对每一 $\varepsilon>0$，存在常数 $C(\varepsilon)$ 使得

$$\|Vu\|\leqslant\varepsilon\|\Delta u\|+C(\varepsilon)\|u\|，\text{对于 } u\in H^2(R^n)\text{成立}, \tag{5.4}$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示 R^n 中的 L^2 范数。

证明 如果 $u\in H^2(R^n)$，则 $(1+|\xi|^2)\hat{u}(\xi)\in L^2(R^n)$，并且因为，$p>\frac{n}{2}$，我们亦有 $(1+|\xi|^2)^{-1}\in L^p(R^n)$。利用

Hölder 不等式和 Parseval 等式对 $q=\frac{2p}{2+p}$ 我们有

$$\|\hat{u}\|_{0,q}=\left(\int_{R^n}|\hat{u}(\xi)|^q d\xi\right)^{1/q}$$

$$=\left(\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-q}(1+|\xi|^2)^q|\hat{u}(\xi)|^q d\xi\right)^{1/q}$$

$$\leqslant\left(\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^{-p}d\xi\right)^{1/p}\left(\int_{R^n}(1+|\xi|^2)^2|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C_p(\|\Delta u\|+\|u\|).$$

因为 $p\geqslant2$，所以 $1\leqslant q\leqslant2$。因此由 Hausdorff 和 Young的经典定理我们有 $\|u\|_{0,r}\leqslant\|\hat{u}\|_{0,q}$ ，这里 $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$。于是

$$\|u\|_{0,r}\leqslant C_p(\|\Delta u\|+\|u\|). \tag{5.5}$$

在 (5.5) 中用 $u(\rho x)$ ，$\rho>0$ 代替函数 $u(x)$，并选取一个适当的 ρ 我们能使 $\|\Delta u\|$ 的系数象我们所希望的那样小。给定 $\varepsilon>0$ 我们选取它使得

$$\|u\|_{0,r}\|V\|_{0,p}\leqslant\varepsilon\|\Delta u\|+C(\varepsilon)\|u\|. \tag{5.6}$$

最后再用 Hölder 不等式我们有

$$\|Vu\|^2=\int_{R^n}V^2u^2dx\leqslant\left(\int_{R^n}|V|^p dx\right)^{2/p}\left(\int_{R^n}|u|^r dx\right)^{2/r},$$

因此由 (5.6)

$$\|Vu\|\leqslant\|V\|_{0,p}\|u\|_{0,r}\leqslant\varepsilon\|\Delta u\|+C(\varepsilon)\|u\|.$$

这就是所希望的。

定理5.5 设 $V(x)$是实的，$V(x)\in L^p(R^n)$. 如果$p>\frac{n}{2}$，$p\geqslant 2$，则 A_0-iV 是 $L^2(R^n)$上的一个酉算子群的无穷小生成元。

证明 我们已经看到算子 iA_0 是自伴的（引理 5.2），特别$\pm A_0$ 是 $m-$ 耗散的，因为 V 是实的，所以算子V 是对称的，从而 A_0-iV 是一个对称算子. 为了证明它是自伴的我们必须指出 $I\pm(A_0-iV)$的值域是整个$L^2(R^n)$. 这由$\pm(A_0-iV)$ 是 $m-$ 耗散的事实即得，而后者又由$\pm A_0$ 的 $m-$ 耗散性，估计

$$\|Vu\|<\varepsilon\|A_0u\|+C(\varepsilon)\|u\|,\ \text{对于}u\in D(A_0)\text{成立}$$

和扰动定理3.3.2推出. 因此A_0-iV是自伴的，并由Stone定理它是$L^2(R^n)$上的一个酉算子群的无穷小生成元.

注 5.6 在定理5.5中对V加上任何使得$V_0\in L^\infty(R^n)$实的的V_0并不改变定理的结论。这由$\pm V_0$是对称的和有界的，因此$A_0-iV-iV_0$亦是自伴算子的事实得到。$I\pm(A_0-iV-iV_0)$的值域是整个 $L^2(R^n)$的事实由对 $I\pm(A_0-iV)$的同样的事实和定理3.1.1得到。

§7.6 一个抛物发展方程

在前面各节我们已经应用半群理论得到对于偏微分算子的初值问题的解的存在性和唯一性结果，所有这些处理偏微分算子的应用是不依赖于变量的，一旦这些算子依赖于 t，问题就不再是自治的，并且我们不得不应用在第五章给出的

发展系统理论以获得类似的结果。

发展系统理论的应用在技巧上比半群理论的应用更复杂，因此在这里我们仅限于考虑一个这种应用的例子，它推广§7.3节的某些结果到非自治的情形。

设 $1<p<\infty$ 和 Ω 是 R^n 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的一个有界区域。考虑初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+A(t,x,D)u=f(t,x), \quad \text{在}\Omega\times[0,T]\text{中},\\&D^\alpha u(t,x)=0, \quad |\alpha|<m, \quad \text{在}\partial\Omega\times[0,T]\text{中},\\&u(0,x)=u_0(x), \qquad \text{在}\Omega\text{中},\end{aligned} \tag{6.1}$$

这里

$$A(t,x,D)=\sum_{|\alpha|\leq 2m}a_\alpha(t,x)D^\alpha, \tag{6.2}$$

其中的符号是在7.1节中引入的。我们将作以下假设：

(H₁) 算子 $A(t,x,D)$ 对于 $t\geq 0$ 在 Ω 中是一致强椭园的，即存在一个常数 $c>0$ 使得

$$(-1)^m Re\sum_{|\alpha|=2m}a_\alpha(t,x)\xi^\alpha\geq c|\xi|^{2m} \tag{6.3}$$

对每一 $x\in\overline{\Omega}$，$0\leq t\leq T$ 和 $\xi\in R^n$ 成立。

(H₂) 系数 $a_\alpha(t,x)$ 对每一 $0\leq t\leq T$ 是 $\overline{\Omega}$ 中变量 x 的光滑函数，并且对某常数 $c_1>0$ 和 $0\leq\beta<1$ 满足

$$|a_\alpha(t,x)-a_\alpha(s,x)|\leq c_1|t-s|^\beta \tag{6.4}$$

对 $x\in\overline{\Omega}$，$0\leq s$，$t\leq T$ 和 $|\alpha|\leq 2m$ 成立。

同强椭园算子族 $A(t,x,D)$，$t\in[0,T)$ 相对应，我们有 $L^p(\Omega)$，$1<p<\infty$ 中的一族线性算子 $A_p(t)$，$t\in[0,T)$。这定义如下：

$$D(A_p(t))=D=W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$$

和

$$A_p(t)u=A(t,x,D)u,\quad 对于\ u\in D.$$

如果 $v_0\in L^p(\Omega)$ 和对每一 $0\leqslant t\leqslant T$，$f(t,x)\in L^p(\Omega)$，则 $L^p(\Omega)$中的（抽象）初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+A_p(t)u=f\\[2ex] u(0)=u_0\end{cases}\tag{6.5}$$

的一个古典解被定义为初值问题（6.1）的一个广义解。回忆一下，对于这样的一个广义解 u，如果它存在，由定义对每一 $t>0$ 满足 $u(t,x)\in W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$，在 $L^p(\Omega)$ 的意义下$\dfrac{du}{dt}$存在且是在$(0,T)$上连续的，同时在$L^p(\Omega)$中 u 本身在$[0,T]$上连续和满足（6.5）。

本节主要结果是在假设（H_1）和（H_2）成立，函数 f **Hölder** 连续时（6.1）存在唯一的广义解，我们从下面的一个专门的引理开始。

引理6.1 在假设（H_1），（H_2）成立时，存在一个常数 $k\geqslant 0$ 使得算子族 $\{A_p(t)+kI\}_{t\in[0,T]}$ 满足 6.5 节的条件 $(P_1)-(P_3)$。

证明 由上述所给算子 $A_p(t)$的定义即知对每一实数k，定

义域 $D(A_p(t)+kI)=D(A_p(t))=D$是不依赖于 t的，因此对任何选取的 $k\geqslant 0$，族$\{A_p(t)+kI\}_{t\in[0,T]}$满足条件$(P_1)$。

因为定理3.1中（方程(3.3))所述的先验估计中的常数 C 在Ω上仅依赖于 n, m, p 和椭圆性常数c，所以我们有

$$\|u\|_{2m,p}\leqslant C(\|A_p(t)u\|_{0,p}+\|u\|_{0,p}) \tag{6.6}$$

对每一 $u\in D$ 成立，先验估计（6.6）通过 S.Agmon的方法推出

$$\|u\|_{0,p}\leqslant\frac{M_1}{|\lambda|}\|(\lambda I+A_p(t)u\|_{0,p} \tag{6.7}$$

对 $u\in D$ 和满足 $Re\,\lambda\geqslant 0$，$|\lambda|\geqslant R$ 的 λ 成立，其中 $R\geqslant 0$ 是某一常数。选取 $k>R$，（6.7）推出

$$\|u\|_{0,p}\leqslant\frac{M_1}{|\lambda+k|}\|(\lambda I+(A_p(t)+kI))u\|_{0,p}$$

$$\leqslant\frac{M}{|\lambda|+1}\|(\lambda I+A_p(t)+kI)u\|_{0,p} \tag{6.8}$$

对$u\in D$ 和满足 $Re\,\lambda\geqslant 0$ 的 λ 成立。如同定理3.5的证明中一样应用引理3.1可以证明对 $Re\,\lambda\geqslant 0$，$0\leqslant t\leqslant T$，算子$\lambda I+(A_p(t)+kI)$是到上的，因此(6.8)推出

$$\|R(\lambda;\ A_p(t)+kI)u\|_{0,p}\leqslant\frac{M}{1+|\lambda|}\|u\|_{0,p} \tag{6.9}$$

对 $u\in L^p(\Omega)$和满足 $Re\,\lambda\leqslant 0$ 的 λ 成立。所以固定一个 $k>R$ 象我们刚才所作的，推出族$\{A_p(t)+kI\}_{t\in[0,T]}$满足$(P_2)$。

最后对 $u\in L^p(\Omega)$和 $w=(A_p(t)+kI)^{-1}v$ 我们有$w\in D$和

$$\|(A_p(t)+kI)w-(A_p(s)+kI)w\|_{0,p}$$

$$= \Big\| \sum_{|\alpha|\leq 2m} (a_\alpha(t,x) - a_\alpha(s,x)) D^\alpha w \Big\|_{0,p}$$

$$\leq C_1 |t-s|^\beta \sum_{|\alpha|\leq 2m} \|D^\alpha w\|_{0,p} \leq C_2 |t-s|^\beta \|w\|_{2m,p}. \tag{6.10}$$

由（6.7）和（6.9）得

$$\begin{aligned} \|w\|_{2m,p} &\leq C(\|A_p(\tau)(A_p(\tau)+kI)^{-1}u\|_{0,p} + \|(A_p(\tau)+kI)^{-1}u\|_{0,p}) \\ &\leq C(1+kM+M)\|u\|_{0,p} \end{aligned} \tag{6.11}$$

综合（6.10）和（6.11）得

$$\begin{aligned} &\|((A_p(t)+kI)-(A_p(s)+kI))(A_p(t)+kI)^{-1}u\|_{0,p} \\ &\quad \leq C_3 |t-s|^\beta \|u\|_{0,p}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

对每一 $u \in L^p(\Omega)$成立。故族$\{A_p(t)+kI\}_{t\in[0,T]}$也满足5.6节的条件（$P_3$）。

由引理6.1和定理5.7.1我们立刻推出我们的主要结果。

定理6.2　设族 $A(t,x,D)$，$0\leq t\leq T$ 满足条件（H_1）和（H_2）。设 $f(t,x)\in L^p(\Omega)$对于 $0\leq t\leq T$满足

$$\left(\int_\Omega |f(t,x)-f(s,x)|^p dx\right)^{1/p} \leq C|t-s|^\gamma \tag{6.13}$$

对某常数 $C>0$ 和 $0<\gamma<1$ 成立，则对每一 $u_0(x)\in L^p(\Omega)$，发展方程（6.1)具有唯一的广义解。

证明　我们首先注意如果 f 满足（6.13），则对每一实数 k，$e^{-kt}f$ 亦然，由引理 6.1 存在 $k\geq 0$ 的值使得族$\{A_p(t)+kI\}_{t\in[0,T]}$满足5.6节的假设($P_1$)－($P_3$)。我们选取并固定这样一个 k。

给定 $u_0(x)\in L^p(\Omega)$，由定理5.7.1初值问题

$$\frac{dv}{dt}+(A_p(t)+kI)v=e^{-kt}f, \quad v(0)=u_0 \tag{6.14}$$

有唯一的（古典）解 v，一个简单计算表明函数 $u=e^{kt}v$ 是初值问题

$$\frac{du}{dt}+A_p(t)u=f, \quad u(0)=u_0 \tag{6.15}$$

的一个解，因此（由定义）它是初值问题（6.1)的一个广义解。

由(6.14)解 v 的唯一性和 u 是（6.15）的一个解当且仅当 $v=e^{-kt}u$ 是（6.14)的一个解的事实知这广义解是唯一的。

注 6.3 能够证明如果 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 足够光滑和系数 $a_\alpha(t,x)$ 及 $f(t,x)$ 足够光滑，则(6.1)的广义解是这个初值问题的一个古典解。例如，如果所有数据是 C^∞ 的，即边界 $\partial\Omega$ 是 C^∞ 类，系数 $a_\alpha(t,x)$ 和 $f(t,x)$ 属于 $C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$，则广义解 u 在 $C^\infty([0,T]\times\overline{\Omega})$ 中。

第八章　对非线性偏微分方程的应用

§8.1　一个非线性Schrödinger方程

在本节我们考虑 6.1 节的结果对 R^2 中的以下非线性Schrödinger方程的初值问题的一个简单应用

$$\begin{cases} \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+k|u|^2u=0, & 在(0,\infty)\times R^2中 \\ u(x,0)=u_0(x), & 在R^2中, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 u 是一个复值函数和 k 是一个实常数。我们将在$L^2(R^2)$中研究这个问题。定义一个线性算子 A_0 如下：$D(A_0)=H^2(R^2)$和 $A_0u=-i\Delta u$ 对 $u\in D(A_0)$。初值问题 (1.1) 能重新写为

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}+A_0u+F(u)=0, & t>0, \\ u(0)=u_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

这里 $F(u)=ik|u|^2u$。

由推论7.5.3算子 $-A_0$ 是 $L^2(R^2)$上的一个C_0 酉算子群 $S(t)$，$-\infty<t<\infty$ 的无穷小生成元。Fourier 变换的一个简单应用给出以下 $S(t)$的确切公式：

$$(S(t)u)(x) = \frac{1}{4\pi i t} \int_{R^2} \exp\left\{ i\frac{|x-y|}{4t} \right\} u(y)\,dy. \qquad (1.3)$$

而且我们有

引理1.1 设 $S(t)$，$t \geqslant 0$ 是由（1.3）给定的半群，如果 $2 \leqslant p \leqslant \infty$ 和 $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$，则$S(t)$能用唯一的方法延拓为映 $L^q(R^2)$ 到 $L^p(R^2)$ 内的一个算子和

$$\|S(t)u\|_{0,p} \leqslant (4\pi t)^{-(2/q-1)}\|u\|_{0,q}. \qquad (1.4)$$

证明 因为 $S(t)$ 是 $L^2(R^2)$ 上一个酉算子，所以我们有 $\|S(t)u\|_{0,2}=\|u\|_{0,2}$ 对于 $u \in L^2(R^2)$成立。另一方面由（1.3）显然 $S(t)$: $L^1(R^2) \to L^\infty(R^2)$和对 $t>0$，$\|S(t)u\|_{0,\infty} \leqslant (4\pi t)^{-1}\|u\|_{0,1}$。Riesz 凸性定理推出在这种情形 $S(t)$ 能唯一地延拓为一个映$L^q(R^2)$到 $L^p(R^2)$内的一个算子和（1.4）成立。

为了证明对每一 $u_0 \in H^2(R^2)$初值问题（1.2）存在一个局部解，我们将利用定理6.1.7和它后面的注记。为此我们首先注意算子 A_0 在 $L^2(R^2)$ 中的图象范数，即范数 $|||u||| = \|u\|_{0,2}+\|A_0u\|_{0,2}$，$u \in D(A_0)$，等价于 $H^2(R^2)$中的范数$\|\cdot\|_{2,2}$。因此 $D(A_0)$赋予图象范数是空间 $H^2(R^2)$。其次我们证明所需要的非线性算子 F 的性质。

引理1.2 非线性映象 $F(u)=ik|u|^2u$ 映 $H^2(R^2)$ 到其自身并且对 u，$v \in H^2(R^2)$满足

$$\|F(u)\|_{2,2} \leqslant C\|u\|_{0,\infty}^2\|u\|_{2,2} \qquad (1.5)$$

$$\|F(u)-F(v)\|_{2,2} \leqslant C(\|u\|_{2,2}^2+\|v\|_{2,2}^2)\|u-v\|_{2,2} \qquad (1.6)$$

证明 由 R^2 中的 Sobolev 定理（见定理 7.4.7）知 $H^2(R^2) \subset L^\infty(R^2)$和存在常数 C 使得

$$\|u\|_{0,\infty}\leqslant C\|u\|_{2,2} \quad 对于 u\in H^2(R^2)成立, \tag{1.7}$$

用 D 表示任何一阶微分算子，对每一 $u\in H^2(R^2)$我们有

$$|D^2(|u|^2u)|\leqslant C(|u|^2|D^2u|+|u|\,|Du|^2),$$

因此

$$\||u|^2u\|_{2,2}\leqslant C(\|u\|_{0,\infty}^2\|u\|_{2,2}+\|u\|_{0,\infty}\|u\|_{1,4}^2). \tag{1.8}$$

由 Gagliardo—Nirenberg 不等式我们有

$$\|u\|_{1,4}\leqslant C\|u\|_{0,\infty}^{1/2}\|u\|_{2,2}^{1/2}, \tag{1.9}$$

并且综合（1.8）和（1.9）我们得到（1.5）。

不等式（1.6）利用对于乘积的导数的 Leibnitz 公式以及估计（1.7）和（1.9）类似可得。

用 Y 表示 $D(A_0)$赋予 A_0 的图象范数的空间。由引理1.2，$F:Y\to Y$ 和它在 Y 中是局部 Lipschitz 连续的，因此定理6.1.7后面的注记推出

引理1.3 对每一 $u_0\in H^2(R^2)$，存在初值问题（1.2）的唯一的解 u，定义在 $t\in[0,T_{max})$ 上使得

$$u\in C^1([0,T_{max});L^2(R^2))\cap C([0,T_{max});H^2(R^2)),$$

同时或者 $T_{max}=\infty$，或者 $T_{max}<\infty$ 和 $\lim\limits_{t\to T_{max}}\|u(t)\|_{2,2}=\infty$。

由引理1.3，初值问题（1.2)有唯一的局部解.为了证明这个局部解是全局解，由引理1.3只须证明对每一 $T>0$，如果 u 是（1.2）在$[0,T)$ 上的解，则 $\|u(t)\|_{2,2}\leqslant C(T)$ 对于 $0\leqslant t<T$ 和某一常数 $C(T)$ 成立。在我们的情形，至少当 $k\geqslant 0$时这是事实，证明如下。

引理1.4 设 $u_0\in H^2(R^2)$和 u 是初值问题(1.2)在 $[0,T)$ 上的解。如果 $k\geqslant 0$，则 $\|u(t)\|_{2,2}$在$[0,T)$上是有界的。

证明 我们首先指出$\|u(t)\|_{1,2}$ 在$[0,T)$ 上是有界的。为

此我们用$\overline{u}$乘以方程

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+k|u|^2u=0 \tag{1.10}$$

并在R^2上积分，然后取虚部得到$\frac{d}{dt}\|u\|_{0,2}^2=0$。因此

$$\|u(t)\|_{0,2}=\|u_0\|_{0,2} \quad 对于\ 0\leqslant t\leqslant T成立。 \tag{1.11}$$

其次我们用$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}$乘以（1.10），在$R^2$上积分并考虑所得结果的实部，这得到

$$\frac{1}{2}\int_{R^2}|\nabla u(t,x)|^2dx+\frac{k}{4}\int_{R^2}|u(t,x)|^4dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{R^2}|\nabla u_0(x)|^2dx+\frac{k}{4}\int_{R^2}|u_0(x)|^4dx. \tag{1.12}$$

因此，由于$k\geqslant 0$，所以$\|v\|_{1,2}$在$[0,T)$上是有界的。

为了证明$\|u(t)\|_{2,2}$在$[0,T)$上是有界的，我们首先注意由 **Sobolev** 定理得$H^1(R^2)\subset L^p(R^2)$对于$p>2$成立和

$$\|v\|_{0,p}\leqslant C\|v\|_{1,2} \quad 对于\ v\in H^1(R^2)成立。 \tag{1.13}$$

因此如果u是（1.2）在$[0,T)$上的解，由$\|u(t)\|_{1,2}$在$[0,T)$上的有界性和（1.13）得

$$\|u(t)\|_{0,p}\leqslant C，\ 对于\ p>2,\ 0\leqslant t<T成立， \tag{1.14}$$

因为u是（1.2）的解，所以它也是积分方程

$$u(t)=S(t)u_0-\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \tag{1.15}$$

的解。用 D 表示任何一阶导数我们有

$$Du(t)=S(t)Du_0-\int_0^t S(t-s)DF(u(s))ds. \tag{1.16}$$

现在我们固定 $p>2$ 和设 $q=\frac{p}{p-1}$ ，$r=\frac{4p}{p-2}$。于是利用引理1.1，(1.16)及 Hölder 不等式我们得到

$$\begin{aligned}\|Du(t)\|_{0,p}&\leqslant\|S(t)Du_0\|_{0,p}+C\int_0^t(t-s)^{1-2/q}\\&\qquad\||u(s)|^2|Du(s)|\|_{0,q}ds\\&\leqslant C\|u_0\|_{2,2}+C\int_0^t(t-s)^{1-2/q}\|u(s)\|_{0,r}\|Du(s)\|_{0,2}ds\\&\leqslant C\|u_0\|_{2,2}+C\int_0^t(t-s)^{1-2/q}ds\leqslant C(t).\end{aligned}$$

这里 C 表示一般的常数，并在最后的不等式中用到这样的事实：$r>2$，因此由 (1.14) $\|u(s)\|_{0,r}\leqslant C$ 和 $\|Du(s)\|_{0,2}\leqslant C\|u(s)\|_{1,2}\leqslant C$。故 $\|u(t)\|_{1,p}\leqslant C$ 和因为由 Sobolev 定理 $W^{1,p}(R^2)\subset L^\infty(R^2)$对于 $p>2$ 成立，所以 $\|u(t)\|_{0,\infty}\leqslant C$ 对于 $0\leqslant t<T$ 成立。

最后，因为 $S(t)$在$L^2(R^2)$上是等距的，所以由(1.15)得

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{2,2}&\leqslant\|S(t)u_0\|_{2,2}+\int_0^t\|S(t-s)F(u(s))\|_{2,2}ds\\&\leqslant\|u_0\|_{2,2}+C\int_0^t\|u(s)\|^2_{0,\infty}\|u(s)\|_{2,2}ds\end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式这就推出 $\|u(t)\|_{2,2}$ 在$[0,T)$上的有界

性。这正如所期望的。

综合引理1.3和引理1.4就得到我们的主要结果.

定理1.5 设 $u_0\in H^2(R^2)$。如果 $k\geqslant 0$，则初值问题

$$\begin{cases}\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+k|u|^2u=0\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}\tag{1.17}$$

有唯一的全局解 $u\in C([0,\infty);\ H^2(R^2))\cap C^1([0,\infty);L^2(R^2))$。

最后我们作一些评注。首先我们注意由引理1.3，(1.17)的局部解取消限制 $k\geqslant 0$ 也存在。实际上我们也能对满 $|k|\ \|u_0\|^2_{0,2}$ 足<2的 $k<0$ 得到全局解的存在，因为这个条件连同(1.12)和(1.9)一起推出 $\|u(t)\|_{1,2}$ 在 $[0,T)$ 上是有界的，并且如引理1.4的证明一样，这推出 $\|u(t)\|_{2,2}$ 的有界性。

又不难证明初值问题 (1.2) 对于由 $F(u)=k|u|^{p-1}u$ 定义的更一般的 $F(u)$ 有局部解，其中 $p\geqslant 1$。而且能够证明对 $k>0$ 和每一 $p\geqslant 1$，具有 $F(u)=k|u|^{p-1}u$ 的 (1.2) 的解实际上是全局解。

§8.2 一个R^1中的非线性热方程

考虑以下初值问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u),\ \ 0<x<1,\ \ t>0,\\ u(t,0)=u(t,1),\ \ u'_x(t,0)=u'_x(t,1),\ \ t\geqslant 0,\\ u(0,x)=u_0(x).\end{cases}\tag{2.1}$$

这个问题描述了长度为 1 的环中其温度依赖于“源”的热流。在本节我们将在适当的假设下证明这个初值问题存在局部和全局的古典解，并研究当 $t\to\infty$ 时全局解的渐近性态。

首先我们引入一个方便的抽象框架。设 $X=C_p([0,1])$ 是所有周期为 1 的连续实值的周期函数具有上确界范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leq x\leq 1}|u(x)|$ 的空间，因此 X 由 $[0,1]$ 上满足 $u(0)=u(1)$ 的连续函数所组成，设 A 是 X 中如下定义的线性算子：$D(A)=\{u: u,u',u''\in X\}$，这里 u' 和 u'' 分别是 u 的一阶和二阶导数和对 $u\in D(A)$，$Au=u''$。

引理2.1 上面定义的算子 A 是 X 上的一个紧解析半群的无穷小生成元，

证明. 因为 A 的定义域包含所有三角多项式（有周期 1），所以由 Weierstrass 逼近定理它在 X 中稠密。设 $g\in X$ 和 $\lambda=\rho e^{i\theta}$，其中 $\rho>0$ 和 $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$。考虑边值问题

$$\begin{cases} \lambda^2 u-u''=g \\ u(0)=u(1), u'(0)=u'(1). \end{cases} \tag{2.2}$$

直接计算表明这个问题有解 u 如下：

$$u(x)=\frac{1}{2\lambda\sinh\frac{\lambda}{2}}\left[\int_0^x \cosh\lambda\left(x-y-\frac{1}{2}\right)g(y)\,dy + \int_x^1 \cosh\lambda\left(x-y+\frac{1}{2}\right)g(y)\,dy\right] \tag{2.3}$$

并且这个解是唯一的。记 $Re\,\lambda=\mu=\rho\cos\theta>0$，利用初等不等式

$$\left|\sinh\frac{\lambda}{2}\right|\geqslant\sinh\frac{\mu}{2},\qquad\left|\cosh\lambda\left(x-y\pm\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$\leqslant\cosh\mu\left(x-y+\frac{1}{2}\right)$$

我们得到

$$|u(x)|\leqslant\frac{\|g\|}{2|\lambda|\sinh\frac{\mu}{2}}\left[\int_0^x\cosh\mu\left(x-y-\frac{1}{2}\right)dy\right.$$

$$\left.+\int_x^1\cosh\mu\left(x-y+\frac{1}{2}\right)dy\right]$$

$$=\frac{\|g\|}{\cos\theta\,|\lambda|^2}. \tag{2.4}$$

任意固定 $\frac{\pi}{4}<\theta_0<\frac{\pi}{2}$ 我们得

$$\rho(A)\supset\Sigma(\theta_0)=\{\lambda:\ |\arg\lambda|<2\theta_0\}$$

和

$$\|R(\lambda;\ A)\|\leqslant(\cos\theta_0|\lambda|)^{-1}\quad 对于\lambda\in\Sigma(\theta_0)成立.$$

由定理2.5.2，A 是一个解析半群 $T(t)$，$t\geqslant0$ 的无穷小生成元。

因为 $T(t)$ 是解析的，所以对 $t>0$ 它依一致算子拓扑是连续的。这对于解析半群是不等式

$$\|T(t+h)-T(t)\|\leqslant h\|AT(t)\|\leqslant\frac{C}{t}h \tag{2.5}$$

对每一$t>0$和$h\geqslant 0$成立的一个直接推论．而且因为对$\lambda\in\Sigma(\theta_0)$，$R(\lambda;A)$映$X$到$D(A)$使得$X$中的有界集被映为$D(A)$中的有界集，并使得它们的一阶导数亦是一致有界的，于是Arzela—Ascoii 定理推出$R(\lambda;A)$是一个紧算子，由定理2.3.2立刻推出 $T(t)$，$t\geqslant 0$ 是一个紧半群，证毕。

现在由引理2.1以及定理6.2.1和6.2.2我们有

定理2.2 对每一连续的实值函数 f 和每一 $u_0\in X$，存在 $t_0>0$ 使得初值问题（2.1）在 $[0,t_0)$ 上有唯一的 mild 解 $u(t,x)$，并且或者 $t_0=\infty$，或者 $t_0<\infty$，则 $\limsup_{t\to t_0}\|u(t,x)\|=\infty$

如果我们进一步假设 f 是Hölder 连续的，则由定理2.2给出的 mild 解是一个古典解，在这种情形我们有：

定理2.3 如果 f 是一个 Hölder 连续的实值函数，则对每一 $u_0(x)\in X$，存在 $t_0>0$ 使得初值问题（2.1）在$[0,t_0)$上有唯一的古典解 $u(t,x)$，并且或者 $t_0=\infty$，或者 $t_0<\infty$，则 $\limsup_{t\to t_0}\|u(t,x)\|=\infty$。

证明 由定理2.2知初值问题(2.1)有唯一的 mild 解u。由定义，它在$[0,t_0)\times[0,1]$上是连续的，因此 $t\to f(u(t,x))$ 在 X 中是连续的，由定理4.3.1知 $u(t,x)$是 Hölder 连续的。因为由我们的假设，f 是 Hölder 连续的，所以 $t\to f(u(t,x))$ 在$[0,t_0)$上是 Hölder 连续的，于是由推论4.3.3推出u是初值问题的一个古典解．证毕。

现在我们转到初值问题（2.1）的全局解的研究，并首先注意定理2.3的条件不能推出（2.1）的一个全局解的存

在。事实上，例如选取 $f(s)=s^2$ 和 $u_0(x)\equiv 1$，容易看出在这种情形(2.1)的唯一解是 $u(t,x)=(1-t)^{-1}$，当 $t\to 1$ 时，它趋于无穷。

引理2.4 设 f 是连续的和 u 是 (2.1)在$[0,\infty)$上的一个有界的 mild 解，则集 $\{u(t,x):\ t\geqslant 0\}$在 X 中是预紧的。

证明 设对 $t\geqslant 0$，$\|u(t)\|\leqslant K$。f 的连续性推出对某一常数 N，$\|f(u(t))\|\leqslant N$。设 $T(t)$，$t\geqslant 0$ 是由 A 生成的半群，并且回忆一下，由引理 2.1，$T(t)$ 对 $t>0$ 是紧的。设 $0<\varepsilon<1$，$t>\varepsilon$，并命

$$
\begin{aligned}
u(t) &= T(\varepsilon)u(t-\varepsilon)+[u(t)-T(\varepsilon)u(t-\varepsilon)] \\
&= u(t)+v_\varepsilon(t)
\end{aligned}
$$

集 $\{u_\varepsilon(t):\ t\geqslant 1\}$在 X 中是预紧的，因为$\{u(t-\varepsilon):t\geqslant 1\}$是有界的和 $T(\varepsilon)$是紧的。又

$$
\begin{aligned}
\|v_\varepsilon(t)\| &= \left\|\int_{t-\varepsilon}^{t} T(t-s)f(u(s))\,ds\right\| \\
&\leqslant \int_{t-\varepsilon}^{t} \|T(t-s)\|\,\|f(u(s))\|\,ds \leqslant \varepsilon MN,
\end{aligned}
$$

这里 $M=\sup\{\|T(t)\|:\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$。因此 $\{u(t):\ t\geqslant 1\}$是全有界的，即预紧的。因为作为区间 $[0,1]$ 的连续像，$\{u(t):\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是紧的，所以结果成立。

引理2.5 设 f 是Hölder 连续。如果对某一$u_0\in X$，初值问题 (2.1)有一个有界的全局解 $u(t,x)$，则存在序列 $t_k\to\infty$ 使得

$$
\lim_{t_k\to\infty} u(t_k,x)=\varphi(x), \tag{2.6}
$$

这里 $\varphi(x)$是边界值问题

$$
\begin{cases}
\varphi'' + f(\varphi) = 0, \\
\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1)
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

的一个解。

证明 用$\frac{\partial u}{\partial t}$乘以方程

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \tag{2.8}
$$

并关于 x 和 t 积分得

$$
\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t}(T,x) \right|^2 dx - \int_0^1 F(u(T,x)) dx
$$

$$
\leqslant \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(0,x) \right|^2 dx - \int_0^1 F(u(0,x)) dx, \tag{2.9}
$$

这里 $F(s) = \int_0^s f(r) dr$。因为对某一常数 K，$|u(t,x)| \leqslant K$，所以我们从（2.9）推出

$$
\int_0^\infty \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt < \infty.
$$

因此存在序列 $t_l \to \infty$使得 $\lim\limits_{t_l \to \infty} \frac{\partial u(t_l, x)}{\partial t} = 0$，$a.e.$在$[0,1]$上，

或者$\frac{\partial u(t_l, x)}{\partial t} \to 0$ 在 L^2（0,1）中。由引理2.4对于 t_l 的一个子序列，我们用 t_k 表示，有 $\lim\limits_{t_k \to \infty} u(t_k, x) = \varphi(x)$ 对于

$0 \leqslant x \leqslant 1$一致成立，因此 $\lim\limits_{t_k \to \infty} f(u(t_k, x)) = f(\varphi(x))$关于$x \in [0,1]$一致成立。在方程(2.8)中在 $L^2(0,1)$的意义下通过序列 t_k取极限$t_k \to \infty$，并且利用 $Au = u''$ 作为 $L^2(0,1)$中的一个算子的闭性我们得到 $\varphi''(x) + f(\varphi(x)) = 0$ 在 $L^2(0,1)$中成立，而且 $\varphi(x)$ 满足周期性条件，因为 $u(t,x)$满足。

推论2.6　如果 f 是 Hölder 连续的和对所有 $s \in R, f(s) \neq 0$，则初值问题（2.1）不存在有界的全局解。

证明　如果 $f(s) \neq 0$，则边界值问题（2.7）没有解。事实上，在$[0,1]$上积分方程 $\varphi'' + f(\varphi) = 0$得

$$\varphi'(1) - \varphi'(0) = \int_0^1 f(\varphi(s)) ds \neq 0$$

因此边界条件不能被满足。从而由引理2.5，（2.1）不存在有界的解。

我们用以下结果来结束我们的讨论。

定理2.7　如果 f 是 Hölder 连续的和对所有 $s \neq 0, sf(s) < 0$，则初值问题（2.1）所有解是有界的，而且当 $t \to \infty$时，（1.1）的所有解趋于零。

证明　解的有界性，甚至更强的估计：

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(t,x)| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(s,x)| \text{ 对于 } t \geqslant s \text{ 成立} \tag{2.10}$$

是最大原理的直接推论。因此初值问题（2.1）的所有解是有界的，而且由引理 2.5，我们知道对某序列 $t_k \to \infty$，$u(t_k, x) \to \varphi(x)$，这里 $\varphi(x)$是边界值问题(2.7)的一个解。但这个边界值问题仅有的解是 $\varphi \equiv 0$，因为用 φ 乘以 $\varphi'' + f(\varphi) = 0$，在[0.1]上积分得到

$$\int_0^1 |\varphi'|^2 dx \leqslant 0.$$

从而推出 $\varphi' \equiv 0$，故 $\varphi = \text{const}$. 然而 $f(s) = 0$ 仅有的解是 $s = 0$. 因此 $\varphi \equiv 0$. 从而我们有

$$\lim_{t_k \to \infty} u(t_k, x) = 0. \tag{2.11}$$

组合（2.10）和(2.11)当 $t \to \infty$ 时得到 $u(t,x) \to 0$.

§8.3 一个R^3中的半线性发展方程

设 Ω 是 R^3 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的一个有界区域。考虑以下非线性初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum\limits_{i=1}^{3} u \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{在}(0,T] \times \Omega\text{中}, \\ u(t,x) = 0, & \text{在}[0,T] \times \partial\Omega\text{上}, \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases} \tag{3.1}$$

我们将应用§6.3节的结果以获得初值问题（3.1）在$L^2(\Omega)$中的一个强解。

在本节我们用(,)和$\|\cdot\|$表示 $L^2(\Omega)$中的内积和范数，象在§7.2节中一样我们定义算子 A 如下：

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), Au = -\Delta u \text{ 对于 } u \in D(A). \tag{3.2}$$

显然算子 A 是对称的，因为 $-A$ 是 $L^2(\Omega)$上一个 C_0 半群的无穷小生成元（如见定理7.2.5），所以 A 是自伴的，而且

由定理7.2.7知$-A$是$L^2(\Omega)$上一个解析半群的无穷小生成元。因此我们能用§2.6节的结果定义A的分数幂,特别地,对某$\delta>0$我们有

$$(Au,u)=(A^{1/2}u,\ A^{1/2}u)=\|A^{1/2}u\|^2=\|\nabla u\|^2\geqslant\delta\|u\|, \qquad (3.3)$$

这里∇u是u的梯度和不等式是Poincare不等式的一个推论。A的定义域由Hölder连续函数组成，这由Sobolev嵌入定理推出或者直接证明如下：

引理3.1 $D(A)$由具有指数$\frac{1}{2}$的Hölder连续函数组成，且存在常数C使得

$$|u(x_1)-u(x_2)|\leqslant C\|Ax\|\cdot|x_1-x_2|^{1/2}$$

对于$u\in D(A)$成立，　　(3.4)

这里$x_i\in R^3$和$|x_1-x_2|$表示x_1和x_2间的Euclid距离。

证明 对$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$我们有经典的等式

$$\varphi(x)=C\int_\Omega\frac{\Delta\varphi(y)}{|x-y|}dy. \qquad (3.5)$$

由(3.5)和Cauchy—Schwartz不等式我们得到

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|^2\leqslant C^2\left(\int_\Omega\Delta\varphi(y)\left(\frac{1}{|x_1-y|}-\frac{1}{|x_2-y|}\right)dy\right)^2$$

$$\leqslant C^2\int_\Omega|\Delta\varphi|^2dy\cdot\int_\Omega\left(\frac{1}{|x_1-y|}-\frac{1}{|x_2-y|}\right)^2dy.$$

但是

$$\int_\Omega\left(\frac{1}{|x_1-y|}-\frac{1}{|x_2-y|}\right)^2dy\leqslant C|x_1-x_2|$$

这里C是一个依赖于Ω的常数。因此

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant C\|A\varphi\|\,|x_1-x_2|^{1/2}. \tag{3.6}$$

用序列 $\varphi_n\in C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 中逼近 $u\in D(A)$，并取极限得(3.4)，因为由定理7.1.2，$H^2(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$。

对于 A 的定义域中的函数 u 我们需要以下估计。

引理3.2 存在一个常数 C 使得

$$\|u\|_{0,\infty}^4\leqslant C\|Au\|^3\|u\|，对于 u\in D(A)成立. \tag{3.7}$$

证明 首先我们注意由定理7.1.2，$u\in D(A)$ 是在 $C(\overline{\Omega})$ 中。因为假设 $\partial\Omega$ 是光滑的，亦知 u 在 $\partial\Omega$ 上为零，对 $u\equiv 0$，(3.7) 是平凡的。设 $\|u\|_{0,\infty}=L>0$，由引理3.1我们有

$$|u(x_1)-u(x_2)|\leqslant K|x_1-x_2|^{1/2}$$

这里 $K=C\|Au\|$。不失一般性，我们设 $|u(0)|=L$ 和设 B_R 是以 0 为中心半径为 $R=(L/K)^2$ 的开球。在这个球中我们有

$$|u(x)|>|u(0)|-|u(x)-u(0)|\geqslant L-K|x|^{1/2}$$

$$>L-K\frac{L}{K}=0 \tag{3.8}$$

因为 u 在 $\partial\Omega$ 上为零，我们由 (3.8) 推出 $B_R\subset\Omega$ 和对 $x\in B_R$

$$|u(x)|\geqslant L-K|x|^{1/2}. \tag{3.9}$$

现在

$$\|u\|^2\geqslant\int_{B_R}|u(x)|^2dx\geqslant\int_{B_R}(L-K(x)^{1/2})^2dx$$

$$=4\pi L^2R^3\int_0^1(1-\eta^{1/2})^2\eta^2d\eta=CL^2R^3=CL^3K^{-6},$$

由此即得 (3.7)。

引理3.3 对于 $\gamma>\frac{3}{4}$ 存在仅依赖于 γ 和 Ω 的常数 C

使得

$$\|u\|_{0,\infty}\leqslant C\|A^{\gamma}u\|，\text{对于 } u\in D(A)\text{成立。}\tag{3.10}$$

证明 设 $3/4<\gamma<1$。如果 $w=A^{\gamma}u$，则 (3.10)等价于 $\|A^{-\gamma}w\|_{0,\infty}\leqslant C\|w\|$。为了估计 $\|A^{-\gamma}w\|_{0,\infty}$ 我们利用由§2.6节的公式 (6.4) 所给的 $A^{-\gamma}$ 的定义，因此

$$A^{-\gamma}w=\frac{\sin\gamma}{\pi}\int_0^{\infty}t^{-\gamma}(tI+A)^{-1}w\mathrm{d}t.\tag{3.11}$$

由 (3.3) 知 $\|A^{-1}\|\leqslant\delta^{-1}$ 和对每一 $t\geqslant0$

$$\|(tI+A)^{-1}w\|\leqslant(t+\delta)^{-1}\|w\|.\tag{3.12}$$

又因为 $-A$ 在 $L^2(\Omega)$中是耗散的，我们有

$$\|A(tI+A)^{-1}w\|\leqslant\|w\|\tag{3.13}$$

和因为 $(tI+A)^{-1}w\in D(A)$，引理3.2推出

$$\|(tI+A)^{-1}w\|_{0,\infty}^{4}\leqslant C\|A(tI+A)^{-1}w\|^{3}\|(tI+A)^{-1}w\|.\tag{3.14}$$

联合 (3.11)，(3.12)，(3.13) 和 (3.14) 得

$$\|A^{-\gamma}w\|_{0,\infty}\leqslant C_1\int_0^{\infty}t^{-\gamma}(\delta+t)^{1/4}\|w\|dt.\tag{3.15}$$

对 $3/4<\gamma<1$，在 (3.15) 中的积分收敛，并且我们有 $\|A^{-\gamma}w\|_{0,\infty}\leqslant C\|w\|$。对于 $\gamma\geqslant1$，结果由对于$3/4<\gamma<1$ 的结果通过估计$\|A^{-1}\|\leqslant\delta^{-1}$得到。

现在我们转到(3.1)的非线性项，并从以下引理开始。

引理3.4 设

$$f(u)=\sum_{i=1}^{3}u_i\frac{\partial u}{\partial x_i}.\tag{3.16}$$

如果 $\gamma>\frac{3}{4}$ 和 $u\in D(A)$，则 $f(u)$有定义和

$$\|f(u)\|\leqslant C\|A^{\gamma}u\|\cdot\|A^{1/2}u\|.\tag{3.17}$$

如果 u，$v\in D(A)$，则

$$\|f(u)-f(v)\|\leqslant C(\|A^{\gamma}u\|\cdot\|A^{\frac{1}{2}}u-A^{\frac{1}{2}}v\| + \|A^{\frac{1}{2}}v\|\cdot\|A^{\gamma}u-A^{\gamma}v\|) \tag{3.18}$$

证明 因为 $D(A)\subset H^2(\Omega)$，所以由 Sobolev 定理（定理7.1.2），$u\in L^{\infty}(\Omega)$。因此 $f(u)\in L^2(\Omega)$，从而 $f(u)$ 有定义。此外，由引理3.3我们有

$$\|f(u)\|\leqslant\|u\|_{0,\infty}\|\nabla u\|\leqslant C\|A^{\gamma}u\|\|\nabla u\|=C\|A^{\gamma}u\|\|A^{1/2}u\|.$$

又

$$\|f(u)-f(v)\|\leqslant\|u\|_{0,\infty}\|\nabla(u-v)\|+\|u-v\|_{0,\infty}\|\nabla u\|$$
$$\leqslant C(\|A^{\gamma}u\|\|A^{1/2}u-A^{1/2}v\|+\|A^{1/2}v\|\|A^{\gamma}u-A^{\gamma}v\|).$$

由（3.17），映象 f 能连续延拓到 $D(A^{\gamma})$，并且（3.17）和（3.18）对每一 u，$v\in D(A^{\gamma})$成立，因此定理6.3.1 的条件成立，并且我们有

定理3.5 初值问题（3.1）对每一 $u_0\in D(A^{\gamma})$有唯一的局部强解，其中 $\gamma>3/4$。

我们注意由§6.3节的结果用上述同样的方法可知如果对某一 $0\leqslant\beta<1$，

$$\|f(t_1,x)-f(t_2,x)\|\leqslant C|t_1-t_2|^{\beta},$$

则初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+\displaystyle\sum_{i=1}^{3}u\frac{\partial u}{\partial x_i}+f(t,x), & \text{在}(0,T]\times\Omega\text{中},\\ u(t,x)=0, & \text{在}[0,T]\times\partial\Omega\text{中},\\ u(0,x)=u_0(x), & \text{在}\Omega\text{中}\end{cases} \tag{3.19}$$

对每一初值 $u_0(x)\in D(A^{\gamma})$有唯一的局部强解，其中 $\gamma>3/4$。

§8.4 一个一般类型的半线性初值问题

本节考虑一个一般类型的半线性初值问题。这推广了前面两节中所考虑的例子，所采用的主要工具是定理 6.3.1。为了应用它我们必须用到无界线性算子的分数幂，因此我们从有关分数幂的一些结果开始。

回忆一下，如果 $-A$ 是 **Banach** 空间中一个解析半群的无穷小生成元和 $0\in\rho(A)$，则象我们在§2.6节中所作的，我们可以定义 A 的分数幂，对于 $0<\alpha\leqslant1$，A^{α} 是一个闭线性算子，其定义域 $D(A^{\alpha})\supset D(A)$ 在X中稠密。我们用 X_{α} 表示 $D(A^{\alpha})$赋予 A^{α} 的图象范数所得到的 **Banach** 空间。因为 $0\in\rho(A)$，所以 A^{α} 是可逆的和 X_{α} 的范数$\|\cdot\|_{\alpha}$ 等价于$\|A^{\alpha}u\|$，$u\in D(A^{\alpha})$。又对 $0<\alpha<\beta\leqslant1$，$X_{\alpha}\supset X_{\beta}$，并且嵌入是连续的。

设 $\Omega\subset R^{n}$ 是一个具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域，设

$$A(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_{\alpha}(x)D^{\alpha} \tag{4.1}$$

是 Ω 中的一个强椭圆算子，其中的符号和有关的定义见§7.1和7.2节。对 $1<p<\infty$，我们有在 $L^{p}(\Omega)$中同$A(x,D)$相应的算子 A_{p} 如下：

$$D(A_{p})=W^{2m,p}(\Omega)\cap W_{0}^{m,p}(\Omega) \tag{4.2}$$

和

$$A_{p}u=A(x,D)u,\ 对于\ u\in D(A_{p}). \tag{4.3}$$

我们在§7.3节已经看到（定理7.3.5）$-A_{p}$ 是 $L^{p}(\Omega)$ 上一个

解析半群的无穷小生成元。对 $A(x,D)$，因此对 A_p，加上一个单位算子的正数倍我们得到一个解析半群的无穷小生成元 $-(A_p+kI)$，它是可逆的，在后面我们自然假设已经这样作了。因此直接假设 A_p 本身是可逆的，由定理7.3.1我们知道以下先验估计

$$\|u\|_{2m,p}\leqslant C(\|A_pu\|_{0,p}+\|u\|_{0,p}),\quad 对于\ u\in D(A_p)成立。$$

因为我们现在假设 A_p 在 $L^p(\Omega)$ 中是可逆的，所以对某常数 $C>0$，$C\|u\|_{0,p}\leqslant\|A_pu\|_{0,p}$。因此我们有

$$\|u\|_{2m,p}\leqslant C\|A_pu\|_{0,p},\quad 对于\ u\in D(A_p)成立。\tag{4.4}$$

在叙述算子 A_p 的分数幂的一些性质之前，我们首先回忆著名的 Gagliardo—Nirenberg 不等式。

引理4.1 设 Ω 是 R^n 中具有 C^m 类边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$u\in W^{m,r}(\Omega)\cap L^q(\Omega)$，这里 $1\leqslant r$，$q\leqslant\infty$。则对任意整数 j，$0\leqslant j<m$ 和任意 $j/m\leqslant\theta\leqslant1$ 我们有

$$\|D^ju\|_{0,p}\leqslant C\|u\|_{m,r}^{\theta}\|u\|_{0,q}^{1-\theta},\tag{4.5}$$

若

$$\frac{1}{p}=\frac{j}{n}+\theta\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-\theta)\frac{1}{q}\tag{4.6}$$

和 $m-j-n/r$ 不是一个非负整数。如果 $m-j-n/r$ 是一个非负整数，则 (4.5) 对 $\theta=j/m$ 成立。

以下引理是我们的主要工具。

引理4.2 设 $1<p<\infty$，A_p 是上面定义的算子。则对任何多重指标 β，$|\beta|=j<2m$ 和任何 $j/2m<\alpha\leqslant1$ 我们有

$$\|D^\beta A_p^{-\alpha}u\|\leqslant C\|u\|_{0,p},\quad 对于\ u\in D(A_p)成立。\tag{4.7}$$

证明 命 $B=D^\beta$。因为 $|\beta|<2m$，所以显然 $D(B)\supset D(A_p)$

由前述引理我们有

$$\|D^{\beta}u\|_{0,p}\leqslant C\|u\|_{2m,p}^{j/2m}\ \|u\|_{0,p}^{1-j/2m} \tag{4.8}$$

(4.8) 的配极变换连同估计 (4.4) 一起推出

$$\|D^{\beta}u\|_{0,p}\leqslant C(\rho^{-1+j/2m}\|A_{p}u\|_{0,p}+\rho^{j/2m}\|u\|_{0,p}) \tag{4.9}$$

对 $\rho>0$ 和 $u\in D(A)$成立。现在由定理2.6.12 得 $D(B)\supset D(A_p^{\alpha})$对于 $j/2m<\alpha\leqslant 1$ 成立，即 $BA_p^{-\alpha}$ 对 α 的这些值是有界的。证毕。

定理4.3 设 $\Omega\subset R^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的一个有界区域。设 A_p 如上，如果 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，则

$$X_{\alpha}\subset W^{k,q}(\Omega)，\text{对于}k-\frac{n}{q}<2m\alpha-\frac{n}{p}，\ q\geqslant p, \tag{4.10}$$

$$X_{\alpha}\subset C^{\nu}(\overline{\Omega})\quad \text{对于}0\leqslant\nu<2m\alpha-\frac{n}{p}, \tag{4.11}$$

并且嵌入是连续的，

证明 如果 $j<2m\alpha$，则由引理4.2即得 $X_{\alpha}\subset W^{j,p}(\Omega)$ 和嵌入是连续的。当 $k-\dfrac{n}{q}<j-\dfrac{n}{p}$时，由定理7.1.1,$W^{j,p}(\Omega)$连续嵌入到$W^{k,q}(\Omega)$中和 (4.10)成立，由 **Sobolev**定理（定理7.1.2) $W^{j,p}(\Omega)$对$0\leqslant\nu<j-\dfrac{n}{p}$连续嵌入到 C^{ν}（$\overline{\Omega}$）中和 (4.10) 成立。

我们顺便注意前一节的引理3.3是定理3.3的一个特殊情形，因为它是(4.10)取 $k=0$，$q=\infty$，$n=3$，$p=2$ 和 $m=1$ 的一个推论。

现在我们转到定理6.3.1的应用，但不叙述和证明一个很一般的结果。我们只限于对 $p=2$ 的 R^3 中的一个二阶算子的简单例子，这已经包含了一般情形的许多重要因素，然后在本节末尾将评注（没有证明）更一般的结果。

定理4.4 设 Ω 是 R^3 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的一个有界区域。设 $A(x,D)$ 是如下给出的强椭园算子

$$A(x,D)=-\sum_{k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}a_{k,l}(x)\frac{\partial}{\partial x_l}$$

这里 $a_{k,l}(x)=a_{l,k}(x)$ 是实值的和在 $\overline{\Omega}$ 中是连续可微的，设 $f(t,x,v,p)$ 对于 $p\in R^3$ 是所有自变量的局部 Lipschitz 连续函数。进一步假设存在一个连续函数 $\rho(t,r)$: $R\times R\to R^+$ 和一个实常数 $1\leqslant\gamma<3$ 使得

$$|f(t,x,u,p)|\leqslant\rho(t,|u|)(1+|p|^{\gamma})\tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}&|f(t,x,u,p)-f(t,x,u,q)|\\&\quad\leqslant\rho(t,|u|)(1+|p|^{\gamma-1}+|q|^{\gamma-1})|p-q|\end{aligned}\tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}&|f(t,x,u,p)-f(t,x,v,p)|\\&\quad\leqslant\rho(t,|u|+|v|)(1+|p|^{\gamma})|u-v|.\end{aligned}\tag{4.14}$$

则对每一 $u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=A(x,D)u+f(t,x,u,\mathrm{grad}u), & \text{在}\Omega\text{中}\\ u(t,x)=0, & \text{在}\partial\Omega\text{上},\\ u(0,x)=u_0(x), & \text{在}\Omega\text{中}\end{cases}\tag{4.15}$$

在 $L^2(\Omega)$ 中有唯一的局部强解。

证明 我们回忆一下，对于强椭园算子 $A(x,D)$ 我们有一个相应的 $L^2(\Omega)$ 中的算子 A 为 $D(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 和 $Au=A(x,D)u$ 对于 $u\in D(A)$．由定理 7.3.6 知 $-A$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一个解析半群的无穷小生成元，由强椭园性和 Poincaré 不等式即知 A 是可逆的，从定理4.3如果 $\alpha>\frac{3}{4}$，则 $X_\alpha\subset L^{\infty}(\Omega)$，并且又若 $\frac{1}{q}>\frac{5-4\alpha}{6}$，则 $X_\alpha\subset W^{1,q}(\Omega)$．因此对于 $\max\left(\frac{3}{4},\ \frac{5\gamma-3}{4\gamma}\right)<\alpha<1$ 我们有

$$X_\alpha\subset W^{1,2\gamma}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega). \tag{416}$$

为了应用定理6.3.1我们必须证明映象

$$F(t,u)(x)=f(t,x,u(x),\nabla u(x)),\ x\in\Omega \tag{4.17}$$

在 $R^+\times X_\alpha$ 上是有定义的满足局部的 Hölder 条件．由(4.12)和 (4.16)对每一 $u\in X_\alpha$ 我们有

$$\|F(t,u)\|_{0,2}\leqslant 2\rho(t,\|u\|_{0,\infty})(M^{1/2}+\|u\|^{\gamma}_{1,2\gamma}), \tag{4.18}$$

这里 M 是 Ω 的测度。因此 F 在 $R^+\times X_\alpha$ 上是有定义的，为证明 F 满足局部 Hölder 条件我们注意

$$\|F(t,u)-F(t,v)\|_{0,2}^2\leqslant 2\int_\Omega|f(t,x,u,\nabla u)-f(t,x,u,\nabla v)|^2dx$$

$$+2\int_\Omega|f(t,x,u,\nabla v)-f(t,x,v,\nabla v)|^2dx \tag{4.19}$$

现在分别估计 (4.19) 右边的每一项．由 (4.13) 和 (4.15) 我们有

$$\int_\Omega|f(t,x,u,\nabla u)-f(t,x,u,\nabla v)|^2dx$$

$$\leqslant C\cdot\rho(t,\|u\|_{0,\infty})^2\int_\Omega(1+|\Delta u|^{2\gamma-2}+|\nabla\nu|^{2\gamma-2})|\nabla(u-\nu)|^2dx$$

$$\leqslant C\cdot\rho(t,\|u\|_{0,\infty})^2(M_1+\|\nabla u\|_{0,2\gamma}^{2\gamma-2}+\|\nabla\nu\|_{0,2\gamma}^{2\gamma-2})\|\nabla(u-\nu)\|_{0,2\gamma}^2$$

$$\leqslant L(\|u\|_\alpha,\|\nu\|_\alpha)\|u-\nu\|_{1,2\gamma}^2\leqslant L(\|u\|_\alpha,\|\nu\|_\alpha)\|u-\nu\|_\alpha^2,$$

这里$\|\cdot\|_\alpha$表示X_α中的范数和L是一个依赖于$\|u\|_\alpha$和$\|\nu\|_\alpha$的常数。为了得到第二个不等式我们利用 **Hölder** 不等式，最后的不等式是X_α在$W^{1,2\gamma}(\Omega)$中连续嵌入的推论。类似地对于第二项由（4.14）和（4.16）我们有

$$\int_\Omega|f(t,x,u,\nabla\nu)-f(t,x,\nu,\nabla\nu)|^2dx$$

$$\leqslant C\rho(t,\|u\|_{0,\infty}+\|\nu\|_{0,\infty})^2\int_\Omega(1+|\nabla u|^{2\gamma})|u-\nu|^2dx$$

$$\leqslant C\rho(t,\|u\|_{0,\infty}+\|\nu\|_{0,\infty})^2\|u-\nu\|_{0,\infty}^2(1+\|\nu\|_{1,2\gamma}^{2\gamma})$$

$$\leqslant L(\|u\|_\alpha,\|\nu\|_\alpha)\|u-\nu\|_\alpha^2,$$

因此

$$\|F(t,u)-F(t,\nu)\|_{0,2}\leqslant L(\|u\|_\alpha,\|\nu\|_\alpha)\|u-\nu\|_\alpha, \tag{4.20}$$

并且（4.15）的强局部解的存在性是定理6.3.1的一个直 接推论。

在继续讨论之前我们注意定理3.5是定理4.4的一个特殊情形。因为$-\Delta$显然是强椭园的 和$f(u,\nabla u)=u\cdot\nabla u$当然满足定理4.4的条件，而且由定理4.4我们也得到§8.2节的存在性结果对$\Omega\subset R^3$的一个推广，然而要假设f在Ω中 是有界的和局部 **Lipschitz** 连续的。

由定理4.4我们得到初值问题（4.15）在$L^2(\Omega)$意义下的一个局部强解。由定理4.4这个解满足

$$u\in C([0,T_0);\ L^2(\Omega))\cap C((0,T_0);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$$
$$\cap C^1((0,T_0);\ L^2(\Omega))$$

对某 $T_0>0$ 成立，但实际上对 $t>0$ 它是这个初值问题的一个古典解。事实上，因为对 $0<t<T_0$，$u\in D(A)\subset C(\overline{\Omega})$ 和由推论4.[illegible].2，$t\to\frac{du}{dt}\in X_\alpha$ 对 $0<t<T_0$ 是局部 Hölder 连续的，所以 $(t,x)\to u(t,x)$ 和 $(t,x)\to\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)$ 在 $0<t<T_0$，$x\in\overline{\Omega}$ 上是连续的。为证明 u 是这个方程的一个古典解，剩下将证明 $u(t,\cdot)\in C^2(\Omega)$。由对 $0<t<T_0$，$u(t,\cdot)\in D(A)$ 的事实我们有 $\nabla u\in W^{1,q_1}(\Omega)\subset L^{p_1}(\Omega)$，这里 $q_1=2, p_1=\frac{6}{3-2}=6$。因此由(4.12)，$Au=F(t,u)-\frac{du}{dt}\in L^{p_1/\gamma}(\Omega)$。所以由定理[illegible].3.1，$u\in W^{2,\gamma/6}(\Omega)$，从而 $\nabla u\in W^{1,q_2}(\Omega)$ 有 $q_2=\frac{\gamma}{6}>2$。重复这一过程我们得到 $\nabla u\in W^{1/q_n}(\Omega)$，这里 $1/q_n=\gamma(1/q_{n-1}-1/3)$。容易验证在有限步之后（如果 $1\leqslant\gamma<2$，则只有一步），$q_n>3$。于是 $\nabla u(t,\cdot)$ 在 Ω 中是 Hölder 连续的，并由此推出 $F(t,u)$ 在 Ω 中是 Hölder 连续的。因为 $\alpha>\frac{3}{4}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}u(t,0)\in X_\alpha$，所以 $\frac{\partial}{\partial t}u(t,\cdot)$ 在 Ω 中是Hölder 连续的。但另一方面 $Au=F(t,u)-\frac{du}{dt}$ 在 Ω 中是 Hölder 连续的，并且根据对于椭园方程的一个古典正则性定理知

$u(t,\cdot)\in C^{2+\delta}(\Omega)$ 对某一 $\delta>0$成立，即 u 关于 x 有二阶 Hölder 连续导数，因此它是（4.15）的一个古典解。

我们用一些对更一般的存在性结果的评注来结束本节。我们假设$A(x,D)$是由（4.1）给出的一个强椭园微分算子。我们在 $L^p(\Omega)$ 中定义一个算子 A_p 为 $D(A_p)=W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$和 $A_pu=A(x,D)u$ 对于 $u\in D(A_p)$。通过对 A_p加上一个恒等算子的正数倍，如同我们将要做的一样，我们能假设 A_p 是可逆的。由定理7.3.5知 $-A_p$ 是 $L^p(\Omega)$中的一个解析半群的无穷小生成元，设

$$F(t,u)(x)=f(t,x,u,Du,D^2u\cdots,D^{2m-1}u),\qquad(4.21)$$

这里 D^j 表示任何第 j 阶导数，假设 f 是其所有变量的连续可微函数，并在 $L^p(\Omega)$中考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+A_pu=F(t,u),\\[2ex] u(0)=u_0.\end{cases}\qquad(4.22)$$

由定理4.3，如果$1-\dfrac{1}{2m}<\alpha<1$ 和 p 分大，则X_α 连续地嵌入到 $C^{2m-1}(\overline{\Omega})$中，由此推出

$$\|F(t,A_p^{-\alpha}u)-F(s,A_p^{-\alpha}v)\|_{0,p}\leqslant C(|t-s|+\|u-v\|_{0,p}),\qquad(4.23)$$

这里C是一个依赖于$\|D^jA^{-\alpha}u\|_{0,\infty},\|D^jA^{-\alpha}v\|_{0,\infty},0\leqslant j<2m-1$ 的常数，因此若 p 充分大，定理6.3.1的条件被满足并且我们有

定理4.5 设 Ω 是 R^n 中具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域。设 A_p 是上述定义的算子。又设 $F(t,u)$由(4.21)所定义，这里 f 是其所有变量，有可能排除 x 变量的连续可微函数。

如果 $p>n$，则对每一 $u_0\in W^{2m,p}(\Omega)\cap W_0^{m,p}(\Omega)$，初值问题(4.22) 有唯一的局部强解。

如果 $p<n$（如定理4.4中的情形一样），则论证表明定理4.5不成立，因为没有 $0\leqslant\alpha<1$ 使得 $D^{2m-1}(A^{-\alpha}u)\in L^\infty(\Omega)$。在这种情形为了得到一个存在性结果人们必须假设函数 f 满足类似于估计 (4.12) —(4.14)的进一步的条件。

§9.5 Korteweg-de Vries方程

在本节我们将用 §6.4 节的结果以获得 Korteweg—de Vries 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t+u_{xxx}+uu_x=0, & t\geqslant 0, \quad -\infty<x<\infty, \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

的局部解的一个存在定理。

整个这一节我们假设所有函数是实值的，用 $\int$ 表示在整个 R 上的积分和用 $\hat{f}$ 表示 f 的 Fourier 变换。

对于每个实数 s 我们引入一个 Hilbert 空间$H^s(R)$如下：设 $u\in L^2(R)$，命

$$\|u\|_s=\left(\int(1+\xi^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}. \tag{5.2}$$

对于 $\|u\|_s$ 是有限的函数 $u\in L^2(R^2)$的线性空间是一个 pre—Hilbert空间，有内积

$$(u,v)_s=\int(1+\xi^2)^s\,\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}}(\xi)d\xi. \tag{5.3}$$

这个空间关于范数 $\|\cdot\|_s$ 的完备化是一个 **Hilbert** 空间，我们用 $H^s(R)$ 表示。

显然 $H^0(R)=L^2(R)$。$L^2(R)$ 中的内积和范数将由 $(\ ,\ )$ 和 $\|\cdot\|_0$ 表示，而且容易验证当 $s=n$ 时，空间 $H^s(R)$ 和 §7.1 节中所定义的空间 $H^n(R)$ 一致，其中 $n\geqslant 1$，且两个不同定义中的范数是等价的。

在以下引理中我们集中了空间 $H^s(R)$ 的一些有用的性质。

引理5.1 (i) 对 $t\geqslant s$，$H^s(R)\supset H^t(R)$ 和 $\|u\|_t\geqslant\|u\|_s$ 对于 $u\in H^t(R)$ 成立。

(ii) 对 $s>\dfrac{1}{2}$，$H^s(R)\subset C(R)$ 和对于 $u\in H^s(R)$ 成立

$$\|u\|_\infty\leqslant C\|u\|_s, \tag{5.4}$$

这里 $\|u\|_\infty=sup\{|u(x)|:x\in R\}$。

证明 由定义和初等不等式 $(1+\xi^2)^t\geqslant(1+\xi^2)^s$ 对于 $t\geqslant s$ 和 $\xi\in R$ 成立，因此 (i) 是显然的。

由 **Cauchy—Schwartz** 不等式我们有

$$
\begin{aligned}
|u(x)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)d\xi\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^s}\right)^{1/2}\left(\int(1+\xi^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2} \\
&= C\|u\|_s
\end{aligned}
$$

因此用 $\hat{u}$ 表示 u 的积分是一致收敛的和 u 是连续的，而且 $\|u\|_\infty\leqslant C\|u\|_s$。

设 $X=L^2(R)=H^0(R)$ 和 $Y=H^s(R)$，其中 $s\geqslant 3$。我们定义一个算子 A_0 为 $D(A_0)=H^3(R)$ 和对 $u\in D(A_0)$，$A_0u=$

D^3u，这里 $D=\dfrac{d}{dx}$。

引理5.2　A_0 是 X 上的一个 C_0 等距群的无穷小生成元。

证明　A_0 是反自伴的，即 iA_0 是自伴的或者等价地 $(A_0u,\ u)=0$ 对所有 $u\in D(A_0)$成立，这由以下即得

$$(A_0u,u)=\int D^3u\cdot udx=-\int u\cdot D^3udx=-(A_0u,u),$$

这里第二个等式通过三次分部积分得到。由 Stone 定理(定理1.10.8) 知 A_0 是 $X=L^2(R)$ 上一个等距群的无穷小生成元。

其次我们对每一 $v\in Y=H^s(R)$,其中 $s\geqslant 3$，定义一个算子 $A_1(v)$为：$D(A_1(v))=H^1(R)$和对 $u\in D(A_1(v))$，$A_1(v)u=v\ Du$。于是我们有

引理5.3　对每一 $v\in Y$，算子 $A(v)=A_0+A_1(v)$ 是 X 上一个 C_0 半群 $T_v(t)$ 的无穷小生成元，满足

$$\|T_v(t)\|\leqslant e^{\beta t} \tag{5.5}$$

对每一 $\beta\geqslant\beta_0(v)=C_0\|v\|_s$ 成立，这里 C_0 是一个不依赖于 $v\in Y$ 的常数。

证明　我们首先注意因为 $v\in H^s(R)$,所以$Dv\in H^{s-1}(R)$。又因为 $s\geqslant 3$，所以由引理5.1知 $Dv\in L^\infty(R)$ 和 $\|Dv\|_\infty\leqslant C\|Dv\|_{s-1}\leqslant C\|v\|_s$。

现在对每一 $u\in H^1(R)$我们有

$$(A_1(v)u,u)=\int vDu\cdot udx=\frac{1}{2}\int vDu^2dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int Dv\ u^2dx \geqslant -\frac{1}{2}\|Dv\|_\infty\|u\|^2 \geqslant -c_0\|v\|_s\|u\|^2$$

因此对所有 $\beta \geqslant \beta_0(v) = c_0\|v\|_s$，$A_1(v)+\beta I$ 是耗散的。因为 A_0 是反自伴的，所以对 $\beta \geqslant \beta_0(v)$，$A_0 + A_1(v) + \beta I$ 也是耗散的，而且

$$\|(A_1(v)+\beta I)u\| \leqslant \|vDu\| + \beta\|u\| \leqslant \|v\|_\infty\|Du\| + \beta\|u\|. \quad (5.6)$$

利用分部积分不难证明对每一 $u \in H^3(R)$，我们有 $\|Du\| \leqslant \|u\|^{2/3}\|D^3u\|^{1/3}$ 和由配极变换对每一 $\varepsilon > 0$ 我们得到

$$\|Du\| \leqslant \varepsilon\|D^3u\| + C(\varepsilon)\|u\| \quad (5.7)$$

选取 $\varepsilon = \frac{1}{2}\|v\|$ 和用 (5.7) 代入 (5.6) 得

$$\|(A_1(v)+\beta I)u\| \leqslant \frac{1}{2}\|A_0u\| + C\|u\|,$$

对于 $u \in D(A_0)$ 成立。　　(5.8)

因此由推论 3.3.3，$A_0 + A_1(v) + \beta I = A(v) + \beta I$ 对每一 $\beta \geqslant \beta_0(v)$ 是 X 上的一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元，所以 $A(v)$ 是一个满足 (5.5) 的 C_0 半群 $T_v(t)$ 的无穷小生成元。

现在我们设 B_r 是 Y 内的中心在原点半径为 $r>0$ 的球考虑算子族 $A(v)$，$v \in B_r$，我们欲证明这个族满足定理6.4.6 的条件。由于族 $A(v)$，$v \in B_r$ 的特殊形式，因此只须证明以下三个条件：

(A_1)　族 $A(v)$，$v \in B_r$ 是 X 中的一个稳定族。

(A_2)　存在 Y 到 X 上的一个同构使得对每一 $v \in B_r$，$SA(v)S^{-1} - A(v)$ 是 X 中的一个有界算子和

$$\|SA(v)S^{-1} - A(v)\| \leqslant C_1,\text{ 对一切 } v \in B_r \text{ 成立}, \quad (5.9)$$

(A_3) 对每一 $v\in B_r$，$D(A(v))\supset Y$，$A(v)$是从Y到X中的一个有界线性算子和

$$\|A(v_1)-A(v_2)\|_{Y\to X}\leqslant C_2\|v_1-v_2\|。\tag{5.10}$$

我们注意(A_1)和§6.4节的条件$(\widetilde{H}_1)$ 相同和 (A_2) 蕴涵 $(\widetilde{H}_2)$及$(\widetilde{H}_5)$，由引理5.4.4和定理5.4.6这是容易看出的。条件(A_3)蕴涵 $(\widetilde{H}_3)$和$(\widetilde{H}_4)$，而$(\widetilde{H}_6)$亦成立，因为 X 和 Y 是自反的。最后，如果$\|u_0\|_s<r$ 和 $v\in B_r$，则

$$\begin{aligned}\|A(v)u_0\|&\leqslant\|D^3u_0\|+\|vDu_0\|\\&\leqslant\|D^3u_0\|+\|v\|_\infty\|Du_0\|\\&\leqslant\|u_0\|_3(1+r)\leqslant r(1+r)=k,\end{aligned}\tag{5.11}$$

并且定理6.4.6的条件 (4.21) 也成立。

为了证明族 $A(v)$对于 $v\in B_r$ 满足条件$(A_1)-(A_3)$，我们需要一些预备结果。设

$$\Lambda^s f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}(1+\xi^2)^{s/2}\hat{f}(\xi)d\xi。\tag{5.12}$$

不难验证 Λ^s 是 $Y=H^s(R)$到 $X=L^2(R)$ 上的一个同构，对于一个给定的函数 $f\in L^2(R)$设 M_f 是用函数 f 相乘的算子，即 $M_fu=fu$。于是我们有

引理5.4 设 $f\in H^s(R)$，其中 $s>3/2$ 和设 $T=(\Lambda^sM_f-M_f\Lambda^s)\Lambda^{1-s}$。则 T 是 $X=L^2(R)$上的一个有界算子和

$$\|T\|\leqslant C\|\mathrm{grad}f\|_{s-1}。\tag{5.13}$$

证明 T的Fourier变换是一个积分算子，其核$k(\xi,\eta)$为

$$k(\xi,\eta)=((1+\xi^2)^{s/2}-(1+\eta^2)^{s/2})\hat{f}(\xi-\eta)(1+\eta^2)^{(1-s)/2}。$$

因为

$$|(1+\xi^2)^{s/2}-(1+\eta^2)^{s/2}|\leqslant s|\xi-\eta|\,((1+\xi^2)^{(s-1)/2}+(1+\eta^2)^{(s-1)/2})$$

我们有

$$k(\xi,\eta)\leqslant s(1+\xi^2)^{(s-1)/2}|\xi-\eta|\,\hat{f}(\xi-\eta)(1+\eta^2)^{(1-s)/2}$$

$$+\ |\xi-\eta|\,\hat{f}(\xi-\eta)=k_1(\xi,\eta)+k_2(\xi,\eta).$$

为了证明T是有界的只须证明具有核 $k_1(\xi,\eta)$和$k_2(\xi,\eta)$的算子 T_1 和 T_2 是有界的。利用逆 Fourier 变换我们有

$$T_1=s\Lambda^{s-1}M_g\Lambda^{1-s},\quad T_2=sM_g \tag{5.14}$$

这里 M_g 是用函数 g 相乘的算子，其中 $\hat{g}(\xi)=|\xi|\,\hat{f}(\xi)$。由引理5.1($ii$)，

$$\|g\|_\infty\leqslant C\|g\|_{s-1}\leqslant C\|\text{grad f}\|_{s-1}. \tag{5.15}$$

现在

$$\|T_1u\|=s\|\Lambda^{s-1}M_g\Lambda^{1-s}u\|=s\|M_g\Lambda^{1-s}u\|_{s-1}$$
$$\leqslant s\|g\|_\infty\|u\| \tag{5.16}$$

和

$$\|T_2u\|=s\|gu\|\leqslant s\|g\|_\infty\|u\|. \tag{5.17}$$

因此 T_1 和 T_2 在 X 上均是有界的，结合（5.15），（5.14）和（5.17）得到所期待的估计（5.13）。

现在我们有

引理5.5 对每一$r>0$，算子族$A(\nu)$对于 $\nu\in B_r$满足条件(A_1)－(A_3)。

证明 设 $r>0$ 是固定的。由引理5.3，如果 $\beta\geqslant c_0r$，则$A(\nu)$是一个满足$\|T_\nu(t)\|\leqslant e^{\beta t}$ 的C_0 半群 $T_\nu(t)$的无穷小生成元，因此 $A(\nu)$ 对于 $\nu\in B_r$ 是 X 中的一个稳定族（见定义6.4.1）。

象我们在上面所提到的 $S=\Lambda^s$ 是 $Y=H^s(R)$ 到 $X=L^2(R)$ 上的一个同构，简单计算表明对于 $u,v\in Y$ 我们有

$$(SA(v)S^{-1}-A(v))u=(S(vD)S^{-1}-vD)u$$
$$=(Sv-vS)S^{-1}Du,$$

因此由引理5.4

$$\|(SA(v)S^{-1}-A(v))u\|=\|(\Lambda^sM_v-M_v\Lambda^s)\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}Du\|$$
$$\leqslant\|(\Lambda^sM_v-M_v\Lambda^s)\Lambda^{1-s}\|\ \|\Lambda^{-1}Du\|$$
$$\leqslant C\|\text{grad } v\|_{s-1}\|u\|\leqslant C\|v\|_Y\|u\|$$

因为 Y 在 X 中稠密，所以 $\|SA(v)S^{-1}-A(v)\|\leqslant C\|v\|_Y\leqslant Cr$。故 (A_2) 被满足。

最后因为 $s\geqslant 3$，所以对每一 $v\in Y$，$D(A(v))\supset Y$ 和对 $v\in B_r$

$$\|A(v)u\|\leqslant\|D^3u\|+\|vDu\|\leqslant\|D^3u\|+\|v\|_\infty\|Du\|$$
$$\leqslant(1+C\|v\|_s)\|u\|_s\leqslant(1+Cr)\|u\|_Y.$$

因此 $A(v)$ 是从 Y 到 X 中的一个有界算子，而且如果 $v_1,v_2\in B_r$，$u\in Y$，则

$$\|(A(v_1)-A(v_2))u\|=\|(v_1-v_2)Du\|$$
$$\leqslant\|v_1-v_2\|\ \|Du\|_\infty\leqslant C\|v_1-v_2\|\ \|u\|_Y.$$

证毕。

由引理3.5，族 $A(v)$ 对于 $v\in B_r$ 满足前面所述的条件 $(A_1)-(A_3)$，因此由这些条件后的注记知定理6.4.6 的所有假设被满足，只要 $r>\|u_0\|_s$。由此我们得到

定理5.6 对每一 $u_0\in H^s(R)$，$s\geqslant 3$ 存在 $T>0$ 使得初值问题

$$\begin{cases}u_t+u_{xxx}+uu_x=0, & t\geqslant 0,\quad -\infty<x<\infty,\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}$$

有唯一的解 $u\in C([0,T];\ H^s(R))\cap C^1([0,T];L^2(R))$。

文 献 评 注

抽象的线性算子半群理论是泛函分析的一个组成部分。因此在许多泛函分析教材中都包含了它的一些内容，这个课题最广泛的论著是 Hille 和 Phillips 的经典专著[1]。其它一般的参考书目是 Butzer 和 Berens[1]，Davies[1]，Dunford 和 Schwartz[1]，Dynkin[1]，Friedman[1]，Ladas 和 Lakshmikantham[1]，Kato[9]，Krein[1]，Martin[1]，Reed 和 Simon[1]，Riesz 和 Nagy[1]，Rudin[1]，Schechter[4]，Tanabe[6]，Walker[1]，Yosida[7] 和其它的书。

对抽象理论连同它的一些应用的一个很好的介绍由 Yosida[3]，Phillips[7]和 Goldstein[3] 的讲义所提供。

自 Hille 和 Yosida 在1948年发现生成定理以来，有界线性算子的半群理论已得到迅速发展。目前，它是一个对许多分析领域有大量应用的广泛的数学课题。本书仅涉及到这个理论的一个部分，主要是为了适应对偏微分方程的应用。在这里我们简要地提及一些在本书中一点没涉及到的课题。

Banach 空间上的有界线性算子半群的许多经典理论已被推广为局部凸线性拓扑空间中的 C_0 类等度连续半群。在这个方向上最初的工作是 L.Schwartz[1] 给出的。该理论的许多经典结果由 K.Yosida[7]推广到这种情形，更一般的进一步的结果在 Komatsu[2]，Dembart[1]，Babalola[1]，Ouchi[1]和 Komura[1]中给出。

该理论也被推广到分布半群。在这个方向上最初的结果属于 J.L.Lions[1]，也见 Chazarin [1]，Da Prato 和 Mosco[1]，Fujiwara[1]和 Ushijima[1],[2]。

在本书中我们仅仅处理了强连续半群。在零点的不同类型的连续性是在 Hille—Phillips[1]中引入和研究了。许多关于半群但不是 C_0 半群的最近结果能在 Oharu[1]，Oharu 和 Sunouchi[1]，Miyadera，Oharu 和 Okazawa[1]，Okazawa[2]和 Miyadera[3]中找到。

有界线性算子的半群理论是和 Banach 空间中的常微分方程的解密切相关的。通常每一个"适定的"线性自治初值问题产生一个有界线性算子半群。S.G.Krein[1] 的书就从这种观点研究了半群理论，然而不适定的 Banach空间中的微分方程已经有了有意义的结果，在这个方向上我们提到 Agmon 和 Nirenberg [1]的工作，也见 Lions[2]，Lax[1]，Zaidman[1]，Ogawa[1]，Pazy[1]，Maz'ja 和Plamenevskii[1]和 Plamenevskii[1]。

象我们刚才所提到的算子半群可以作为 Banach 空间中的一阶微分方程的初值问题的解而获得，许多理论是处理单一的一阶方程，其理由是高阶方程能转化成一阶系统，然后通过改变基本 Banach 空间得到一个单一的一阶方程。然而有些高阶方程的结果不能通过这种转化得到和有些结果直接处理高阶方程恰恰是更方便的，对于有兴趣的读者我们指出 S.G.Krein[1]的第三章讨论了二阶方程。进一步的参考文献是 Fattorini[1]，[2]，Goldstein[2]，[4]，Sova [1]，Kisynski[3]，[4]，Nagy[1]，[2]，[3]，Travis 和 Webb[1]，[2]，Rankin[1]和其它的。

在最近几年有界线性算子的半群理论已被推广为 Hilbert 和 Banach 空间上一个庞大的和有趣的非线性算子半群理论。在这里我们仅提及该课题的一些一般的参考文献：Benilan, Crandall 和 Pazy[1], Brezis[1], Barbu[2], Crandall[1], Yosida[7], Pazy[4], [8]和Pavel[3]。

在我们转到对在本书中出现的材料的有关参考书目作更仔细的介绍之前，注意我们并不企图搜集一个完整的参考书目，即使是对包含在本书中的那部分理论。许多参考文献被给出仅仅是为了指出材料的出处，或密切相关的论题，和进一步阅读的原始材料。一个该课题的很广泛的参考文献由 J.A.Goldstein 编辑，并将出现在由他所编的即将出版的书中。

§1.1 关于在 $t=0$ 点依一致算子拓扑连续的有界线性算子半群，或等价地，由有界线性算子生成的半群的结果可以作为在一个 Banach 代数上关于指数函数的结果。这种观点被 M.Nagumo[1] 和 Yosida[1] 采用，也见 Hille—Phillips[1]的第 V 章。一致连续的算子群表示成一个有界算子的指数函数也由 D.S.Nathan[1]获得。

§1.2 本节的大部分结果是标准的并能在每一本处理线性算子半群的教材中找到，例如在文献评注开头所提到的所有教材。

定理2.7的证明是遵循 I.Gelfand[1]的方法。引理 2.8 是 E.Landau 的一个经典不等式（例2.9）的一个推广，它在本节中的形式出自 Kallman 和 Rota[1]。对于 Hilbert 空间的情形 T.Kato[12]证明了如果 $T(t)$是一个收缩半群，则2是（2.13）中可能的最好常数。对于一般 Banach 空间，

可能的最好常数似乎还不知道。有关不等式更多的细节在 **Certain** 和 **Kurtz**[1]中给出，也见 **Holbrook**[1]。

§1.3 本节的主要结果是定理3.1，它给出了强连续收缩半群的无穷小生成元的第一个完全的特征，这个结果是以后系统地发展有界线性算子半群理论的开始，它由 **E.Hille**[2]和 **K.Yosida**[2]独立地得到。该定理的充分部分的证明是遵循 **K.Yosid**[2]的思想，在该证明中出现的有界线性算子 A_λ 称为 A 的 **Yosida** 逼近，**Hille** 的证明是基于指数公式

$$T(t)x=\lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x$$

对于 $x\in D(A^2)$收敛的一个直接证明，如见 **Tanabe**[6]的§3.1节。

§1.4 对于 $X=H$ 是一个 **Hilbert** 空间的特殊情形，本节的结果属于 **R.S.Phillips**[5]。对一般情形的推广由 **Lumer** 和 **Phillips**[1]完成。顺便注意，一个收缩半群的无穷小生成元A的特征作为一个耗散算子，即一个耗散算子并使得对 $\lambda=0$，$\lambda I-A$ 的值域是整个 X，在非线性半群理论中起做本质的作用。

§1.5 本节的主要结果是定理5.2，它给出了C_0 有界线性算子半群的无穷小生成元的一个完全特征，因此推广了 **Hille—Yosida** 定理，后者限于一个 C_0 收缩半群的生成元的特征。定理5.2几乎同时独立地由 **W.Feller**[1]，**I.Miyadera**[1]和 **R.S.Phillips**[2]得到。本书的证明是 **Feller** 证明的简化。

定理5.2的充分性的证明的其它方法是直接用 **Hille—Yosida** 定理的充分部分的证明的一个简单推广去证明定理

5.5，例如见 Dunford—Schwartz[1]的第 *VIII* 章。

§1.6 线性算子半群的研究实际上开始于算子群的研究，最初的结果是关于有界线性算子生成的群（见§1.1节）。这些工作由 M.Stone[1]和 J.von—Neumann[1]得到。定理6.3属于 E.Hille[1]和定理6.6属于J.R.Guthbert[1]。

§1.7 关于 Laplace 变换的反演结果是标准的对于 Laplace 变换的反演的较好结果能通过稍微精细的分析得到，见 Hille—Phillips[1]的第Ⅱ章定理7.7的条件实际上蕴涵了 A 是一个解析半群的无穷小生成元（见§2.5）。对于这样的算子 A，通常是直接用 Dunford—Taylor 的算子演算证明由（7.26）定义的 $U(t)$ 是一个有界线性算子半群和 A 是其无穷小生成元，例如见 Friedman[1]的 §2 节的第二部分。实际上，我们是证明条件（7.24）蕴涵定理5.2的条件和因此 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元。

§1.8 定理 8.1 属于 E.Hille [1]．关于这一点亦见 Dunford—Segal[1]，注意到 Dunford 和 Segal 的这篇文章强烈地激励和引导 K.Yosida 得到一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元的特征是有趣的，见 Yosida[2]。

定理8.3属于 E.Hille（见Hille—Phillips[1]）．在定理8.3中给出的指数公式是为了作为 Hille 的 C_0 收缩半群的无穷小生成元的特征的证明之基础．这个公式也是一般Banach空间中非线性收缩半群理论的开始，它始于1971年 Crandall 和 Liggett 的基本结果．这里我们所给的定理 8.3 的证明来自Hille—Phillips[1]．一个更一般结果的不同证明在§3.5节中给出。

§1.9　本节的结果基于 Hille—Phillips[1]的第 V 章和 Kato[3]。也见 Kato[9]的第八章。

§1.10　伴随半群的定义来自 Phillips[4]，也见Hille—Phillips[1]的第 XIV 章和 K.Yosida[7]的第IX 章，后者给出了 H.Komatsu[2]对Phillips的结果在局部凸空间的 拓广。

然而一种稍微不同的方法导致同样的强连续半群，这由 Butzer和Berens[1]的第 I 章得到.定理10.8属于M.Stone[1]，且是由一个无界线性算子生成的半群的第一个结果.

§2.1　代数的半群性质 $T(t+s)=T(t)\cdot T(s)$ ，增加了半群 $T(t)$ 的许多拓扑性质. 属 于 K.Yosida [3] 的 定 理 1.1是这种结果的一个例子. Hille—Phillips[1]的第 X 章的另一个例子是

定理　如果 $T(t)$是在$(0,\infty)$ 上强可测的有界线性算子半群，则它在 $(0,\infty)$ 上是强连续的，而且如果 $T(t)$在$t=0$ 是弱连续的，则 $T(t)$是一个 C_0 半群.

§2.2　本节的结果包括了 Hille—Phillips[1]的第 XVI 章的部分结果。而在 Hille—Phillips[1] 中的结果的证明用了 Gelfand 表示理论，我们的定理2.3的证明完全是初等的，这是 Hille[1]中的处理方法。定理2.4，2.5和 2.6 也 来 自 Hille[1]。

关于定理2.6的逆的一个反例在 Hille—Phillips[1](469页)中给出，也见 Greiner，Voigt 和 Wolff[1]。关于C_0正算子半群的谱映象定理的进一步的 结 果 能 在 Greiner[1]，Derdinger[1]和 Derdinger 和 Nagel[1]中找到。

§2.3　定理3.2属于 P.D.Lax（见 Hille—Phillips[1]的第X章）. 定理3.3和推论3.4及3.5取自 Pazy[3]。

定理3.6来自 Hille—Phillips[1]的第XVI章，但在那里证明用了 Gelfand 表示理论，我们的证明是初等的。定理3.6给出了对于一个无穷小生成元 A 生成一个对 $t>0$ 依一致算子拓扑连续的 C_0 半群的必要条件。似乎这种半群的无穷小生成元用其预解式的性质所刻划的完全特征还不知道。

§2.4 关于C_0半群的可微性的一些早先的结果由E.Hille[3]和 K.Yosida[4]得到。一个可微半群的无穷小生成元的完全特征，即定理4.7属于 Pazy[3]。定理4.7 由 V.Barbu[1]推广到分布半群和由 M.Watanabe[1] 推广到局部凸空间上的线性算子半群。推论4.10属于 Yosida[4]，定理4.11和推论4.12及4.14来自 Pazy[5]。

§2.5 定理5.2属于 E.Hille[1]，我们的证明是遵照 Yosida[4]。定理5.3属于 E.Hille[3]。定理5.5取自 Crandall，Pazy 和 Tartar[1]，而定理5.6属于 Kato[10]。推论5.7属于 J.Neuberger[1]和 T.Kato[10]。推论5.8似乎是新的，其基础空间的一致凸性或一个类似的条件是必须的，因为存在具体的解析收缩半群的例子使得$\lim\limits_{t\to 0}\|I-T(t)\|=2$，这是 G.Pisier（私人通信）给出的。

本节有关的结果亦是 A.Beurling[1]和 M.Certain[1]的深刻结果。

§2.6 设 A 是一个 C_0 半群的无穷小生成元。$-A$ 的分数幂首先被 S.Bochner[1]和 R.S.Phillips[1] 所研究，后来 A.V.Balakrishnan[1]，[2]给出了$-A$ 的分数幂的一个新的定义并将理论推广到更广泛的一类算子。大约同一时期其它作者对此课题也有贡献，在他们中间有M.Z.Solomjak

[1], K.Yosida[5], T.Kato[4], [5] , [7] ,Krasnoselskii 和 Sobolevskii[1], J.Watanabe[1]. 后来 H.Komatsu 在一系列文章 Komatsu[3]—[7] 中给出了一种统一的观点。

我们的简化处理主要来自Kato[4]和[5], 亦见Friedman[1]的§14节的第二部分和 Tanabe[6]的§2.3节。

§3.1 本节的结果属于 R.S.Phillips[2]. 有关的结果见 Hille—Phillips[1]的第 *XIII* 章和 Dunford—Schwartz [1]的第 8 章. Phillips[2]也叙述了在有界扰动 (即 无穷小生成元由一个有界算子的扰动) 下保持 C_0 半群性质的研究. 在其它结果中他证明对 $t>0$ 依一致算子拓扑的连续性被保持而同样的性质对 $t>t_0>0$ 不被保持. 一个半群 $T(t)$ 对 $t>0$ 的可微性在其生成元的有界扰动下是否被保持的问题似乎仍然未解决, 这个问题的一个有关结果见Pazy[3].

§3.2 定理2.1属于 E.Hille[1], 也见 T.Kato[9]的第9章和 Hille—Phillips[1]的第*XIII*章. 一个有关结果在 Da Prato[1]中给出.

§3.3 推论3.3本质上是由H.F.Trotter[2]对$\alpha<\frac{1}{2}$的情形所证明, 也见 Kato[9]的第9章. 推论3.3对 $\alpha<1$ 的一般情形由 Gustafson[1]所证明, 定理3.2是在 Pazy[9]中所证明的推论3.3的一个更对称形式的一个推论。

定理3.4被P.Chernoff[2]证明, 推论3.5属于P.Chernoff[2]和 N.Okazawa[1], 它是 R.Wüst[1]在Hilbert 空间中的结果的一个推广。

§3.4 本节的主要结果属于 H.F.Trotter[1], J.

Neveu[1]对收缩半群的特殊情形独立地证明了收敛定理(定理4.5)一个类似的收敛结果也在 T.Kato[9] 和 T.Kurtz [1],[2]中给出。在 Trotter[1]中 A_n 的预解式$R(\lambda; A_n)$的极限其本身是某个算子的预解式的证明是不清楚的，它由 T.Kato[3]指出和修正。在定理4.5中$(\lambda_0 I - A)D$在 X 中稠密的条件保证$\overline{A}$(A 的闭包)是一个 C_0 半群的无穷小生成元，对此一个不同的必要和充分条件在 M.Hasegawa[1]中给出。Trotter 定理的一个有趣的证明由 Kisynski[2]得到。

Trotter[1]也考虑了作用在不同的 Banach 空间上的 C_0 半群的收敛问题，该结果在证明某些差分方程的解收敛到一个相应的偏微分方程的解时自然是很有用的，这种类型的一个例子在下面的§3.6节中给出。

在 Banach 空间中不是 C_0 半群的半群的收敛性被 I. Miyadera[2]和 Oharu—Sunouchi[1]所研究。

半群收敛结果也被推广到局部凸空间上，例如见 K. Yosida[7]，T.Kurtz[2]和 T.I.Seidman[1]。

§3.5　引理5.1是推论5.2的一个简单推广，它属于 P. Chernoff[1]。定理5.3和推论5.4也是Chernoff[1]的结果的推广。推论5.5是 Trotter 乘积公式，Trotter[2]，的一个推广，关于这个公式的条件见 Kurtz 和 Pierre[1]。

§3.6　本节的结果和偏微分方程的数值解有关，它们实际上类似于 Trotter[1]和 Kato[9]的结果，结果亦见 Lax—Richtmyer[1]和 Richtmyer—Morton[1]。

§4.1　Banach 空间X中的初值问题(1.1)称为一个抽象 Cauchy 问题，这种问题的系统研究始于E.Hille[4]。唯一性定理(定理1.2)属于 Ljubic[1]。定理1.3属于Hille[4]，

亦见 **Phillips**[3]。(1.1)对于初值是 X 中的稠子集 D（不必等于 $D(A)$ 的解的存在性的充分条件是在 **R.Beals**[1] 中给出。

定义 (1.1) 的弱解的一个不同的方法由 **J.Ball**[1] 给出，请看下一节的注记。

§4.2 定义2.3定义了(2.1)的 mild 解，如果 A 是一个半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。**J.M.Ball**[1]定义了方程

$$\frac{du}{dt}=Au+f(t) \tag{E}$$

的"弱解"，这里 A 是 X 上一个闭线性算子和 $f\in L^1(0,T:X)$，如下：

定义 一个函数 $u\in C([0,T]:X)$ 是 (E) 在 $[0,T]$ 上的一个弱解，如果对每一 $v^*\in D(A^*)$，函数 $\langle u(t),v^*\rangle$ 在 $[0,T]$ 上是绝对连续的和

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),v^*\rangle=\langle u(t),A^*v^*\rangle+\langle f(t),v^*\rangle \quad a.e.\text{在}[0,T]\text{上}$$

然后他证明了

定理(Ball) 对每一 $x\in X$，(E) 在 $[0,T]$ 上存在唯一的弱解 u 满足 $u(0)=x$，当且仅当 A 是 X 上一个 C_0 有界线性算子半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，且在这种情形下，u 被给出如下

$$u(t)=T(t)x+\int_0^t T(t-s)f(s)ds,\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

推论2.5和2.6属于 **Phillips**[2]，也见 **T.Kato**[9]。定理2.9是定理2.4的一个简单的推广。

§4.3 定理3.1本质上属于 A.Pazy[7].那里仅证明u对于满足$\beta<1-\frac{1}{p}$的指数 β 是 Hölder 连续的。对于$\beta=1=\frac{1}{p}$结果仍真的证明属于 L.Veron，定理3.2来自 Crandall 和 Pazy[1]。推论3.3，对于更一般的A 依赖于 t （见第五章）的情形由 H.Tanabe[2]，P.E.Sobolevskii[4]，E.T. Poulsen[1]和 Kato[9]所证明. 定理3.5属于 Kato[9]，也见 Da Prato 和 Grisvard[1]，对于这个问题的最优正则性条件在 E.Sinestrari[1]中给出。

§4.4 定理4.1取自 Pazy[6]。它是上述 R.Datko[1]的结果的一个简单推广. 例4.2的思想取自 Greiner, Voigt 和 Wolff[1]。这类其它的例子也在 Hille—Phillips[1] 的第XXIII章和 Zabczyk[1]中给出。

比定理4.3更一般的一个结果由 M.Slemrod[1]所证明，同样的问题也在 Derdinger 和 Nagel[1] 和 Derdinger[1] 中被处理了。

定理4.5取自 S.G.Krein[1]的第4章.

§4.5 本节结果是专门的，它们在这里被引入主要是作为第五章第一节的准备，本节结果和 T.Kato[11]中的结果紧密相关，也见 H.Tanabe[6]的第4章。

§5.1 本节的结果完全是初等的，它们唯一的目的是为了引出本章的其余结果和使读者熟悉发展系统的概念和主要性质"发展系统"的术语不是标准的，一些作者称之为一个传播子，或者一个基本解以及还有的一个发展算子。

§5.2 本节的结果来自 Kato[11]，在这里稳定性概念的定义强于通常人们用于有限差分逼近中的。当 $A(t)$ 不依

赖于 t 时，则稳定性的条件和定理1.5.3 的条件一致。因此我们能对空间重新赋予范数使得在新范数中 A 生成一个满足 $\|T(t)\|\leqslant e^{\omega t}$ 的半群，如果 $A(t)$ 依赖于 t，但 $D(A(t))$ 不依赖于 t 和对 $t\geqslant 0$ 算子 $A(t)$ 可换，则不难证明 $A(t)$ 的稳定性蕴涵 X 能重新赋予范数使得在新范数下 $\|S_t(s)\|\leqslant e^{\omega s}$ 对每一 $t\in[0,T]$ 成立，这里 $S_t(s)$ 是由 $A(t)$ 生成的半群。

§5.3—§5.5　对于具有无界算子 $A(t)$ 的初值问题(3.1)的发展系统首先由 **T.Kato**[1] 构造成功，其主要假设是 $D(A(t))=D$ 不依赖于 t 和对每一 $t\geqslant 0$，$A(t)$ 是 X 上一个 C_0 收缩半群的无穷小生成元以及关于有界算子族 $A(s)A(s)^{-1}$ 的某些连续性条件，**Kato**[1]的主要结果本质上是定理4.8的一个特殊情形，在试图推广 **Kato**[1]的结果和本质上取消 $D(A(t))$ 不依赖于 t 的假设方面，有几位作者在种种条件下构造了发展系统，例如见 **Elliot**[1]，**Goldstein**[1]，**Heyn**[1]，**Kato**[2]，**Kisynski**[1]，**Yosida**[7]，[6]和其它的。

我们的介绍和 **T.Kato**[11]，[13]的工作密切相关，其简化属于 **Dorroh**[1]，亦见 **H.Tanabe**[6]中的第 4 章。

一个利用算子和技巧直接在 $L^p(0, T: X)$ 空间研究发展方程 (3.1) 的不同方法在 **Da Prato** 和 **Iannelli**[1] 中被发展了，亦见 **Da Prato** 和 **Grisvard**[1]和 **Iannelli**[1]。

最后我们注意对于注3.2所需要的特殊分划在 **Kato**[3] 的附录或者也在 **Evans**[1]中构造了。

§5.6—§5.7 抛物情形的发展系统首先由 *H*. **Tanabe** [1]，[2]，[3] 构造，同时独立的但方法是类似的由 **P.E. Sobolevskii**[4]得到，这些工作都假设 $D(A(t))$ 不依赖于 t。

这个假设稍微放宽的工作是由 **T.Kato**[6]和**P.E.Sobolevskii**[1]，[3]所作，他们假设对某一 $0<\gamma<1$，$D(A(t)^{\gamma})$ 不依赖于 t，后来 **T.Kato** 和 **H.Tanabe**[1]，[2]成功地去掉了 $D(A(t))$不依赖于 t 的假设，他们用函数$t\to R(\lambda;\ A(t))$的某种正则性假设代替了它，关于这一点我们要说的是如果假设 $t\to R(\lambda;A(t))$有较高的可微性则可得到解的较高的可微性，见 **Suryanarayana**[1]。如果假设条件在[0,T] 的一个复邻域成立，则(6.2)的解能延拓到[0,T]的一个复邻域，见 **Komatsu**[1]，**Kato**，**Tanabe**[2] 和 **K.Masuda**[1]。**K.Nasuda**[1]进一步指出在这种特殊情形 **Kato—Tanabe**条件对于发展系统的存在性是必要的。

在§5.6和§5.7节我们仅处理 $D(A(t))$ 是不依赖于 t 的情形。我们参考了 **Tanabe**[2]，**Sobolevskii**[4] 和 **Poulsen**[1]，亦看了 **H.Tanabe**[6]的第5章，这里亦处理$D(A(t))$可变的情形。

发展方程 (6.1) 的解的不基于对于 (6.2) 的发展系统的构造的一种不同的处理（其 $D(A(t))$不依赖于 t）在**Da Prato**和 **Sinestrari**[1]中给出。

§5.8　定理 8.2 属于 **H.Tanabe**[4] 和定理 8.5 属于 **Pazy**[2]。

一个和发展方程 (8.1) 的解的渐近性态相关的并在本章未涉及的课题是奇摄动，例如见 **Tanabe**[5] 和 **Tanabe** 和 **Watanabe**[1]。

§6.1　定理1.2，1.4和1.5属于 **I. Segal**[1]，也见 **T.Kato**[8]。一个 f 是 **Lipschitz** 连续的但 (1.1) 的**mild** 解不是强解的例子能在 **Webb**[1]中找到。定理1.6和1.7是简

单的但是是前面结果的有用的改进。

我们注意 f 的 **Lipschitz** 连续性能用增生性代替，并且在适当的条件下仍然能得到初值问题（1.1）的全局解，例如见 **Kato**[8]，**Martin**[1]的第 8 章和 **N.Pavel**[2]这篇非常一般的论文。

§6.2　本节的结果基于 **Pazy**[7]，具有 $A=0$ 和 f 连续的（3.1）没有解的例子例如在 **Dieudonne**[1] 的 287 页和 **J.Yorke**[1]中给出，事实上我们知道具有 $A=0$ 的初值问题（3.1）对于每一连续的 f 有一个局部的强解当且仅当 X 是有限维的，见 **Godunov**[1]。

本节的主要存在性结果定理2.1由 **N.Pavel**[1]推广如下：

定理(Pavel)　设 $D\subset X$ 是 X 的一个局部的闭子集，f: $[t_0, t_1)\rightarrow X$ 连续。又设 $S(t)$对于 $t\geqslant 0$ 是一个 C_0 半群和对 $t>0$，$S(t)$是紧的。则对于每一 $x_0\in D$，(3.1) 存在一个局部解 $u:[t_0, T(t_0,x_0)]\rightarrow D$，这里 $t_0<T(t_0, x_0)\leqslant t_1$ 的必要和充分条件是

$$\lim_{h\rightarrow 0} h^{-1} dist(S(h)z+hf(t,z):D)=0$$

对所有 $t\in[t_0, t_1)$和 $z\in D$ 成立。

§6.3　本节的主要结果定理 3.1 来自 **H.Fujita** 和 **T.Kato**[1]的工作，同这类似的和更一般的结果能在**Sobolevskii**[4]，**Friedman**[1]的§16节的第二部分和 **Kielhöfer**[3]中找到。

D.Henri[1] 的著作“半线性抛物方程的几何理论”包含一个类似于定理3.1的存在结果.解对初值的依赖性的广泛的研究。解的渐近性态和许多有趣的应用。

本节和前一节的一些结果的某些推广在 Lightbourne和 Martin[1]和 Martin[2]中给出，在这些结果中假设 f 关于 A 的某一分数幂是连续的（但不必是 Lipschitz 的）和 $-A$ 生成的半群对 $t>0$是紧的。

前面各节对于自治情形（即 A 不依赖于 t）的存在性结果之所以陈述主要是为了简单的原因。它们可以推广到非自治情形，这实际已经作了，比如对于§6.1节中的结果如Segal[1]和 Prüss[1]，对于§6.2节的结果如 Fitzgibbon[1]，对于§6.3节中的结果如 Sobolevskii [4]， Friedman[1] 及 Kielhöfer[3]。

对于非自治半线性发展方程的一些渐近性结果在 Nambu[1]中给出。

§6.4 本节的结果和 Kato[4] 密切相关，也见 Kato[15]。一个处理类似方程的不同方法最近由 Grandall 和 Souganidis[1]所发展。

§7.1 象我们在引言中所提到的，本书的主要目的是半群理论对于偏微分方程的应用，本章和下一章的目的是提供一些这种应用的例子。

对 Sobolev 空间的一种细致的研究在 Adams[1] 中给出，其它参考文献是 Necas[1]，Friedman[1] 和 Lions—Magenes[1]。

§7.2—§7.3 为简单起见，这两节所提供的应用仅限于 Dirichlet 边界条件。所有的结果对于更一般的边界条件成立，例如见 Agmon[1]，Stewart[2]，Tanabe[6]的§3.8节，Pazy[2]和其它的。对于具有一般边界条件的椭园算子所需的先验估计在 Agmon，Douglis 和 Nirenberg[1]，

Nirenberg[1], Schechter[1],[2],[3]和 Stewart[2]中给出，也见 Lions—Magenes[1].

定理2.2属于 L. Gårding[1]，其证明，例如，可见 Agmon[2] Friedman[1], Yosida[7]。椭园边值问题解的正则性（定理2.3）对于一般边值和 $1<p<\infty$ 由 Douglis 和 Nirenberg[1]所证明，对于 Drichlet 边值由Nirenberg [1]所证明，也见 Agmon[2]，Friedman[1] 和 Lions—Magenes[1].

定理3.1属于 Agmon, Douglis 和 Nirenberg[1], 定理3.2属于 Agmon[1]和定理3.7属于 Stewart[1].

另一个生成解析半群的算子的有趣例子是经典的Stokes算子，详见 Giga[1].

§7.4 这一节我们采用 K.Yosida[3],[7]的处理，在那里更一般的双曲方程也论述了。

§7.5 本节采用经典的 Hausdorff—Young定理的证明能在 Stein 和 Weiss[1]的第V章找到。

§7.6 同本节所提供的结果类似的具有更一般的边界条件的结果能在 Tanabe[6]的第 5 章和 Friedman[1] 的第 2 部分的§9, 10节中找到.

§8.1 本节的结果属于 Baillon, Cazenave 和 Figueira[1]以及 Ginibre 和 Velo[1]. 我们的介绍来自 Baillon 等，有关的结果能在 Lin 和 Strauss[1], Pecher 和 von Wahl[1]和 Haraux[1]中找到.

在 R^2 的一个有界区域 Ω 中定理1.5亦成立，在这种情形解的局部存在性类似于在整个 R^2 上的情形，而全局存在

性则更加复杂，因为不能直接地应用Sobolev 嵌入定理。为了在这种情形证明全局存在性需要用一个新的插值一嵌入不等式，见 Brezis 和 Gallouet[1]。

§8.2　本节的结果和 Pazy[7]密切相关。

§8.3—§8.4　在这两节，通过用§6.3节的抽象结果，解析半群的无穷小生成元的负分数幂被应用来得到某类非线性偏微分方程的初值问题的解。

§8.3节的结果同 Fujita 和 Kato[1] 的思想稍微密切些，在那里线性算子 A 比我们考虑的更复杂，引理3.3 属于 Fujita—Kato[1]。

§8.4节的结果是仿照 Sobolevskii[4] 和 Friedman[1] 的工作。在 Hölder 空间和对无界区域的类似的结果能在 Kielhöfer[1],[2]中找到。

在该节应用的 Gagliardo—Nirenberg 不等式例如在 Friedman[1]的第一部分的§9，§10节中被证明。

通常在某些情况下利用某些进一步的条件能得到全局解，例如见 Kielhöfer[3]和 von Wahl[1],[2]，对于R^2中的 Navier—Stokes 方程见 Fujita Kato[1] 和 Sobolevskii [2]。

最后我们注意，为了简单起见我们才选取线性算子A不依赖于 t，当 A 依赖于 t 时，类似结果能得到，例如见 Friedman[1]和 Kielhöfer[3]。

§8.5　本节的结果取自 Kato[14]中许多例子中的一个，对于这个特殊的例子包含一个全局存在性定理的较好结果在 Kato[16]中给出。

参考文献

R.A.Adams

[1] *Sobolev spaces*, Academic Press, New York(1975) .

S.Agmon

[1] On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. *Comm. Pure Appl. Math.* 15(1962)119—147.

[2] Elliptic boundary value problems, Van Nostrand (1965).

S.Agmon and L.Nirenberg

[1] Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces, *Comm. Pure Appl. Math.*16(1963)121—239.

S.Agmon, A. Douglis and L.Nirenberg

[1] Estimates near the bouneary for solutions of elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*12(1959)623—727.

V.A.Babalola

[1] Semigroups of operators on locally convex spac es, *Trans. Amer. Math. Soc.*199(1974)163—179

J.B.Baillon, T.Cazenave, and M.Figueira

[1] Equation de Schrödinger non lineaire, *C.R.Acad*

Sc. Paris 284 *A*(1977)869—872.

A.V.Balakrishnan

[1] An operator calculus for infinitesimal generators of semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 91 (1959)330—353.

[2] Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them, *Pacifc J.Math.* 10(1960)419—437.

J.M.Ball

[1] Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variation of constants formula, *Proc. Amer. Math.Soc.* 63(1977)370—373.

V.Barbu

[1] Differentiable distribution semi-groups, *Anal. Scuola Norm. Sup. Pisa* 23(1969)413—429.

[2] *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff Int. Publ. Leyden the Netherlands(1976).

R.Beals

[1] On the abstract Cauchy problem, J.Func.Anal. 10(1972)281—299.

Ph. Benilan, M. Crandall and A. Pazy

[1] *Nonlinear evolution governed by accretive operators*(a book to appear).

A.Beurling

[1] On analytic extension of semi-groups of operat-

ors, *J. Func. Anal.* 6(1970)387—400.

S. Bochner

[1] Diffusion equations and stochastic processes, *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.* 35(1949)368-370.

P.L. Butzer and H. Berens

[1] *Semi-groups of operators and approximation*, Springer-Verlag New York(1967).

H. Brezis

[1] *Operateurs maximaux monotone et semigroups de contractions dans les espaces de Hilbert*, Math. Studies 5, North Holland(1973).

H. Brezis and T. Gallouet

[1] Nonlinear Schrödinger evolution equations, *Nonlinear Anal. TMA* 4(1980)677—682.

M. Certain

[1] One-parameter semigroups holomorphic away from zero, *Trans. Amer. Math. Soc.* 187(1974) 377—389.

M. Certain and T. Kurtz

[1] Landau-Kolmogorov inepualities for semigroups and groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 63(1977) 226—230.

J. Chazarin

[1] Problemes de Cauchy abstrait et applications a quelques problemes mixtes, *J. Func. Anal.* 7 (1971)386—446.

P.Chernoff

[1] Note on product formulas for operator semi-groups, *J. Func. Anal.* 2(1968)238—242.

[2] Perturbations of dissipative operators with relative bound one, *Proc. Amer. Math. Soc.* 33 (1972)72—74.

M.G.Crandall

[1] An introduction to evolution governed by accretive operators, "Dynamical-Systems-An international Symposium." (L.Cesari, J. Hale, J. LaSalle, Eds.) Academic Press, New York (1976)131—165.

M.G.Crandall and A. Pazy

[1] On the differentiability of weak solutions of a differential epuation in Banach space, *J. Math and Mech.*18(1969)1007—1016.

M.G.Crandall, A. Pazy, and L. Tartar

[1] Remarks on generators of analytic semigroups, *Isruel J. Math* 32(1979) 363—374.

M.G.Crandall and P.E.Souganidis

[1] Nonlinear evolution equations MRC technical Rep.2352(1982).

J.R.Cuthbert

[1] On semi-groups such that $T_t - I$ is compact for some $t>0$, *Z.Whar.*18(1971)9—16.

G.Da Prato

[1] Somma di generatori infinitesimali di semigruspi analitici, *Rend. Sem. Math. Univ Padova* 40 (1968)151—161.

G.Da Prato and P. Grisvard

[1] Sommes d'operateurs lincaires et equations differetielles operationnelles, *J. Math. Pure et Appl.*54(1975)305—387.

G.Da Prato and M.Iannelli

[1] On a method for studying abstract evolution equatios in the Hyperbolic case. *Comm. in Partial Diff. Eqs.* 1(1976)585—608.

G.Da Prato and U. Mosco

[1] Semigruppi distribuzioni analitici. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 19(1965)367—396.

G.Da Prato and E. Sinestrari

[1] Hölder regularity for non autonomous abstract parabolic equations. *Israel J. Math.*42(1982)1-19

R.Datko

[1] Extending a theorem of A.M.Liapunov to Hilbert space, *J. Math. Anal. and Appl.* 32 (1970) 610—616.

E.B.Davics

[1] *One Parameter Semigroups*. Academic Press, London(1980).

B.Dembart

[1] On the theory of semigroups of operators on

locally conuex spaces, *J. Func. Anal.* 16(1974) 123—160.

R.Derdinger

[1] Uber das Spektrum positiver Generatoren. *Math Z.* 172(1980)281—293.

R.Derdinger and R. Nagel

[1] Der Generator stark stetiger Verbandhalbgruppen auf $C(X)$und dessen Spektrum, *Math. Ann* 245 (1979)159—177.

J.Dieudonne

[1] *Foundation of modern analysis*, Academic Press, New York(1960).

J.R.Dorroh

[1] A simplified proof of a theorem of Kato on linear evolution equations, *J. Math. Soc. Japan* 27(1975)474—478.

N.Dunford and J. Schwartz

[1] *Linear operators, Part I General theory. Interscience.* New York(1958).

N.Dunford and I. E. Segal

[1] Semi-groups of operators and the Weierstrass theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52(1946) 911—914.

E.B.Dynkin

[1] *Markov Processes*, Vol. I. Springer-Verlag.Berlin (1965).

J.Elliot

[1] The equations of evolution in a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 103(1962)470—483.

C.L.Evans

[1] Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space, *Israel J. Math.*26(1977)1—42.

H.Fattorini

[1] Ordinary eifferential equations in linear topological spaces I,*J.Diff. Eqs.* 5(1968)72—105.

[2] Ordinary differential equations in linear topological spaces II,*J.Diff. Eqs.* 6(1969)50—70.

W.Feller

[1] On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators. *Ann. of Math.*58 (1953)166—174.

W.E.Fitzgibbon

[1] Semilinear functional differential equations in Banach space,*J. Diff. Eqs.* 29(1978)1—14.

A.Freidman

[1] *Partial differential equations*, Holt, Reinhart,and Winston, New York(1969).

H.Fujita and T.Kato

[1] On the Navier-Stokes initial value problem I. *Arch. Rat. Mech. and Anal.* 16(1964)269—315

D.Fujiwara

[1] A characterization of exponential distribution

semi-groups, *J. Math. Soc. Japan* 18 (1966) 267—274.

L. Gårding

[1] Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scan.* 1(1953)55-72

I. Gelfand

[1] On one-parameter groups of operators in normed spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 25 (1939) 713—718.

Y. Giga

[1] Analyticty of the semigroup generated by the Stokes operator in L_r spaces, *Math. Z.* 178(1981) 297—329.

J. Ginibre and B. Velo

[1] On a class of nonlinear Schrödinger equations, *J. Func. Anal.* 32(1979)1—71.

A. N. Godunov

[1] On Peano's theorem in Banach spaces, *Func. Anal. and Appl* 9(1975)53—55.

J. A. Goldstein

[1] Abstract evolution equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 141(1969)159—185.

[2] Semi-groups and second order differential equations, *J. Func. Anal.* 4(1969)50—70.

[3] Semi-groups of operators and abstract Cauchy problems, Tulane Univ. Lecture notes(1970).

[4] The universal addability problem for generators of cosine functions and operators, *Houston J. Math.* 6(1980)365—373.

G. Greiner

[1] Zur Perron-Froebenius-Theorie stark stetiger Halbgruppen, *Math. Z.* 177(1981)401—423.

G. Greiner, J. Voigt and M. Wolff

[1] On the spectral bound of the generator of semigroups of positive operators, *J. Operator Theory* 5(1981)245—256.

K. Gustafson

[1] A perturbation lemma, *Bull. Amer. Math. Soc.* 72(1966)334—338.

A. Haraux

[1] Nonlinear evolution equations—Global behavior of solutions, Lecture notes in Math. 841 Springer-Verlag(1981).

M. Hasegawa

[1] On the convergence of resolvents of operators, *Pacifc J. Math.* 21(1967)35—47.

D. Henry

[1] Geometric theory of semilinear parabolic equations, Lecture notes in Math. 840 Springer-Verlag (1981).

E. Heyn

[1] Die Differentialgleichung $dT/dt = P(t)T$ für Ope-

ratorfunktioen, *Math. Nach.*24(1962)281—330.

E.Hille

[1] Representation of one-parameter semi-groups of linear transformations, *Proc. Nat. Acad. Sc.U.S.A.*28(1942)175—178.

[2] *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math Soc. Colloq. Publ. Vol.31,New York(1948).

[3] On the differentiability of semi-groups of operators, *Acta Sc. Math.*(Szeged)12 (1950)19—24.

[4] Une generalization du probleme de Cauchy, *Ann Inst. Fourier* 4(1952)31—48.

E.Hille and R.S.Phillips

[1] *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math Soc. Colloq Pucl. Vol.31, Providence R.I.(1957)

J.Horbrook

[1] A Kallman-Rota inequality for nearly Euclidean spaces, *Adv. in Math.*14(1974)335—345.

M. Iannelli

[1] On the Green function for abstract evolution equations, *Bul. U.M.I.*6(1972)154—174.

R.R.Kallman and G.C.Rota

[1] On the inequality $\|f'\|^2\leqslant 4\|f\|\cdot\|f''\|$, Inequalities, Vol.II.Academic Press New York (1970)187-192.

T.Kato

[1] Integration of the equation of evolution in Banach space, *J. Math. Soc. Japan*5(1953)208-234.

[2] On linear differential equations in Banach spaces, *Comm. Pure. Appl. Math.* 9(1956)479—486.

[3] Remarks on pseudo-resolvents and infnitesimal generators of semi-groups, *Proc. Japan Acad.*35 (1959)467—468.

[4] Note on fractional powers of linear operators, *Proc. Japan Acad.*36(1960)94—96.

[5] Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan* 13(1961)246—274.

[6] Abstract evolution epuations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces, *Nagoya Math. J.* 19(1961)93—125.

[7] Fractional powers of dissipative operators II, *J. Math. Soc. Japan* 14(1962)242—248.

[8] Nonlinear evolution equations in Banach spaces, *Proc. Symp. Appl. Math.* 17 *Amer. Math. Soc.* (1965)50—67.

[9] *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, New York (1966).

[10] A characterization of holomorphic semi-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*25(1970)495—498.

[11] Linear evolution equations of "hyperbolic" type, *J. Fac. Sc. Univ. of Tpkyo* 25(1970)241-258.

[12] On an inequality of Hardy, Littlewood and Polya *Adv. in Mbth.* 7(1971)107—133.

[13] Linear evolution equations of "hyperbolic" type

II. *J. Math. Soc. Japan* 25(1973)648—666.

[14] Quasi-linear equations of evolution with applications to partial differential equations, Lecture Notes in Math. 448, Springer Verlag(1975)25-70

[15] Linear and quasi-linear equations of evolution of hyperbolic type. C.I.M.E.II Ciclo(1976).

[16] On the Korteweg-de Vries equation, *Manuscripta Math.* 28(1978)89—99.

T.Kato and H. Tanabe

[1] On the abstract evolution equation, *Osaka Math. J.* 14(1962)107—133.

[2] On the analyticity of solutions of evolution equations, *Osaka J. Math* 4(1969)1—4.

H.Kielhöfer

[1] Halbgruppen und semilinear Anfangs-Randwertprobleme, *Manuscripta Math.* 12(1974)121—152.

[2] Existenz und Regularität von Lösungen semilinearer parabolicher Anfangs-Randwertprobleme, *Math. Z.* 142(1975)131—160.

[3] Global solutions of semilinear evolution equations satisfying an energy inequality, *J. Diff. Eqs.* 36(1980)188—222.

J.Kisynski

[1] Sur les operateures de Green des Problemes de Cauchy abstraits, *Studia Math.* 23(1963/4)285—328.

[2] A proof of the Trotter-Kato theorem on approximation of semi-groups, *Colloq. Math.* 18(1967) 181—184.

[3] On second order Caucny's problem in a Banach space, *Bull. Acad. Pol. Sc.*18(1970) 371—374.

[4] On cosine operator functions and one parameter groups of operators, *Studia Math.* 144 (1972) 93—105.

H. Komatsu

[1] Abstract analyticity in time and unique continuation property of solutions of a parabolic equation, *J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo* 9(1961) 1—11

[2] Semi-groups of operators in locally convex spaces, *J. Math. Soc. Japan* 16(1964) 230—262.

[3] Fractional powers of operators. *Pacifc J. Math.* 19(1966) 285—346.

[4] Fractional powers of operators II Interpolation spaces, *Pacifc J. Math.* 21(1967) 89—111.

[5] Fractional powers of operators III Negative powers, *J. Math. Soc. Japan* 21(1969) 205—220.

[6] Fractional powers of operators IV Potential operators, *J. Math. Soc. Japan* 21(1969) 221—228.

[7] Fractional powers of operators V Dual operators, *J. Fac. Sc. Univ of Tokvo* 17(1970) 373—396.

T. Komura

[1] Semi-groups of operators in locally convex spac

es, *J. Func. Anal.* 2(1968)258—296.

M.A.Krasnoselskii and P.E.Sobolevskii

[1] Fractional powers of operators defned on Banach spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 129(1959)499—502.

S.G.Krein

[1] *Linear differential equations in Banach spaces*, Translations Amer. Math. Soc. 29,Providence. RI(1971).

T.G.Kurtz

[1] Extensions of Trotter's operator semi-group approximation theorems, *J. Func. Anal.*3(1969)111—132.

[2] A general theorem on the convergence of operator semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 148 (1970)23—32.

T.G.Kurtz and M. Pierre

[1] A counterexample for the Trotter product formula, *MSC Tech. Rep.*2091(1980).

G.E.Ladas and V. Lakshmikantham

[1] *Differential equations in abstract spaces*, Academic Press, New York(1972).

P.D.Lax

[1] On the Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of the solutions of elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 8

(1955)167—190.

P.D.Lax and R.D.Richtmyer

[1] Survey of the stability of linear finite difference equations, *Comm. Pure. Appl. Math* 9(1956)267—293.

J.H.Lightbourne and R. H. Martin

[1] Relatively continuous nonlinear perturbations of analytic semigroups, *Nonlinear Anal.TMA*1(1977) 277—292.

J.E.Lin and W.Strauss

[1] Decay and Scattering of solutions of nonlinear Schrödinger equations, *J. Func. Anal.* 30(1978) 245—263.

J.L.Lions

[1] Les semi-groupes distributions, *Portugal.Math* 19 (1960)141—164.

[2] *Equations differentielles operationelles et problemes aux limites*, Springer Verlag. Berlin(1961).

J.L.Lions and E.Magenes

[1] *Problemes aux linutes non homogenes et applications*, Vol. I, II Dunod Paris (1968)Vol. III(1970)

Ju.I.Ljubic

[1] Conditions for the uniqueness of the solution of Cauchy's abstract proalem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 130(1960)969—972.

C.Lumer and R.S.Phillips

[1] Dissipative operators in a Banach space, *Pacifc J. Math* 11(1961)679—698.

R.H.Martin

[1] *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, John Wiley and Sons,New York (1976).

[2] Invariant sets and a mathematical model involving semilinear differential equations, Nonlinear equations in abstract spaces, Proc. Inter. Symp. Univ. of Texas Arlington, Academic Press, New York(1978)135—148.

K.Masuda

[1] On the holomorphic evolution operators, *J. Math Anal. Appl.* 39(1972)706—711.

V.G.Maz'ja and B.A.Plamenevskii

[1] On the asymptotic behavior of solutions of differential equations in Hilbert space, *Math. USSR Izvestia* 6 (1972)1067—1116.

I.Miyadera

[1] Generation of a strongly continuous semi-group of operators, *Tohoku Math. J.*4(1952)109—114.

[2] Perturbation theory for semi-groups of operators (Japanese),*Sugaku* 20(1968)14—25.

[3] On the generation of semigroups of linear operators, *Tohoku Math. J.*24(1972)251—261.

I.Miyadera, S. Oharu and N. Okazawa

[1] Generation theorems of semigroups of linear operators, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.* 8(1972/3) 509—555.

M.Nagumo

[1] Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Rigen, *Japan. J. Math.* 13(1936)61—80.

B.Nagy

[1] On cosine operator functions in Banach spaces, *Acta Sc. Math.* 36(1974)281—289.

[2] Cosine operator functions and the abstract Cauchy problem, *Periodica Math. Hung.* 7(1976) 15—18.

[3] Approximation theorems for cosine operator functions, *Acta Math. Acad. Sc. Hung.* 29(1977) 69—76.

T.Nambu

[1] Asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations in Banach space, *SIAM J. Math. Anal.* 9(1978)687—718.

D.S.Nathan

[1] One parameter groups of transformations in abstract vector spaces, *Duke Math. J.* 1 (1935)518—526.

J.Necas

[1] *Les methodes directes en theorie des equations el-*

liptiques, Masson and Cie Ed. Paris(1967).

J.W.Neuberger

[1] Analiticity and quasi-analiticity for one-parameter semi-groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 25(1970) 488—494.

J.von-Neumann

[1] Uber die analytische Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen, *Math. Z.*30(1939)3—42.

J.Neveu

[1] Theorie des semi-groupes de Markov, *Univ. of Calif. Publ. in Statistics* 2(1958)319—394.

L.Nirenberg

[1] On elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 13(1959)1—48.

H.Ogawa

[1] Lower bounds for solutions of differential inequalities in Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc* 16(1965)1241—1243.

[2] On the convergence of semi-groups of operators, *Proc. Japan Acad.* 42(1966)880—884.

S.Oharu

[1] Semigroups of linear operators in Banach spaces, *Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ.* 7(1971)205—260.

S.Oharu and H.Sunouchi

[1] On the convergence of semigroups of linear ope-

rators, *J. Func. Anal.* 6(1970)292—304.

N. Okazawa

[1] A perturbation theorem for linear contraction semi-groups on reflexive Banach spaces, *Proc. Japan Acad.* 47(1971)947—949.

[2] A generation theorem for semigroups of growth of order a, *Tohoku Mbth. J.* 26(1974)39—51.

S. Ouchi

[1] Semi-groups of operatprs in locally convex spaces, *J. Math. Soc. Japan* 25(1973)265—276.

N.H. Pavl

[1] Invariant sets for a class of semi-linear equations of evolution, *Nonlinear Anal. TMA* 1(1977) 187—19[illegible].

[2] Global existence for nonautonomous perturbed differential equations and flow invariance, *Preprint Series in Math* 22(1981)*INCREST, Bucharest*.

[3] Analysis of some nonlinear problems in Banach spaces and applications, Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Facultatea de Matematica(1982).

A. Pazy

[1] Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space, *Arch. Rat. Mech. and Anal.* 24(1967)193—218.

[2] Asymptotic behavior of the solution of an abst-

ract evolution equation and some applications, *J. Diff. Eqs.* 4(1968)493—509.

[3] On the differentiability and compactness of semigroups of linear operators, *J. Math. and Mech.* 17(1968)1131—1141.

[4] Semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space, C.I.M.E. Varenna 1970 Ed. Cremonese (1971)343—430.

[5] Approximation of the identity operator by semigroups of linear operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 30(1971)147—150.

[6] On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space, *SIAMJ. Math. Anal* 3(1972) 291—294.

[7] A class of semi-linear equations of evolution, *Israel J. Math* 20(1975)23—36.

[8] Semigroups of nonlinear contractions and their asymptotic behaviour, Nonlinear analysis and mechanics, Heriot-Watt Symp. Vol. III, R. J. Knops Ed. Pitman Research notes in Math 30 (1979)36—134.

[9] A perturbation theorem for linear *m*-dissipative operators, *Memorias de Matematica da U.F.R.J.* 131(1981).

H. Pecher and W. von-Wahl

[1] Time dependent nonlinear Schrödinger equations,

Manuscripta Math. 27(1979)125—157.

R.S.Phillips

[1] On the generation of semi-groups of linear operators, *Pacific J. Math.* 2 (1952)343—369.

[2] Perturbation theory for semi-groups of linear operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 74 (1953) 199—221.

[3] A note on the abstract Cauchy problem, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 40(1954)244—248.

[4] The adjoint semi-group, *Pacific J. Math.* 5(1955) 269—283.

[5] Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math Soc.* 90(1959)193—254.

[6] Dissipative operators and parabolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 12(1959) 249—276.

[7] Semi-groups of contraction operators, Equazioni Differenzio Astratte, C.I.M.E.(Rome)1963.

B.A.Plamenevskii

[1] On the existence and asymptotic solutions of differential equations with unbounded operator coefficients in a Banach space, *Math.* USSR *Izvestia* 6 (1972)1327—1379.

E.T.Poulsen

[1] Evolutionsgleichungen in Banach Räumen, *Math*

Z. 90(1965)286—309.

J.Prüss

[1] On semilinear evolution equations in Banach spaces, *J. Reine u. Ang. Mat.* 303/4(1978)144—158.

S.M.Rankin

[1] A remark on cosine families, *Proc. Amer. Math Soc.* 79(1980)376—378.

M.Reed and B.Simon

[1] *Methods of modern mathematical physics II. Fourier analysis, Self-adjointness,* Academic Press, New York(1975)

F.Sz.Riesz and B.Nagy

[1] *Functional Analysis,* P. Ungar, New Pork(1955)

W.Rudin

[1] *Functional analysis,* McGraw-Hill,New York(1973)

R.D.Richtmyer and K. W. Morton

[1] *Difference methods for inital value problems,* Second ed. Interscience, New York(1967).

M.Schechter

[1] Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.* 12(1959) 37—56.

[2] General boundary value problems for elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl.*

Math. 12(1959)457—486.

[3] Remarks on elliptic boundary value problems, *Comm. Pure Appl. Math.* 12(1959)561—578.

[4] *Principles of functional analysis*, Academic Press New York(1971).

L.Schwartz

[1] Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups, *Tata Inst. Fund. Research*(1958).

I.Segal

[1] Non-linear semi-groups, *Ann. of Mbth.*78(1963) 339—364.

T.I.Seidman

[1] Approximation of operator semi-groups, *J.Func. Anal.* 5(1970)160—166.

E.Sinestrari

[1] On the solutions of the inhomogeneous evolution equation in Banach space, *Rend. Acc. Naz Lincei* **LXX** (1981)12—17.

M.Slemrod

[1] Asymptotic behavior of C_0 semi-groups as determined by the spectrum of the generator, *Indiana Univ. Math. J.* 25(1976)783—792.

P.E.Sobolevskii

[1] First-order differential equations in Hilbert space with variable positive definite self-adjoint opera-

tor, a fractional power of which has a constant domain of definition, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 123(1958)984-987.

[2] On non-stationary equations of hydrodinamics for viscous fluid, *Dokl. Akad Nauk SSSR* 128 (1959)45—48.

[3] Parabolic equations in a Banach space with an unbounded variable operator, a fractional power of which has a constant domain of definition, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 138(1961)59—62.

[4] On the equations of parabolic type in Banach space, *Trudy Moscow Mat. Obsc* 10 (1961)297—350, English trans. *Amer. Math. Soc. Trans.* 49(1965) 1—62.

M.Z.Solomjak

[1] Applications of the semi-gronp theory to the study of differential equations in Banach spaces *Dokl. Akad. Nbuk SSSR* 12(1958)766—769.

M.Sova

[1] Probleme de Cauchy pour equations hyperboliques operationelles a coefficients constants non-bornes, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 22(1968) 67—100.

E.M. Stein and G. Weiss

[1] *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Univ. Press (1971).

B.Stewart

[1] Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 199 (1974)141—161.

[2] Generation of analytic semigroups by strongly elliptic operators under general boundary conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 259 (1980) 299—310.

M.H.Stone

[1] On one-parameter unitary groups in Hilbert space, *Ann. Math.* 33(1932)643—648.

P.Suryanarayana

[1] The higher order differentiability of solutions of abstract evolution equations, *Pacific J. Math.* 22(1967)543—561.

H.Tanabe

[1] A class of the equations of evolution in a Banach space, *Osaka Math. J.* 11(1959)121—145.

[2] On the equations of evolution in Banach space, *Osaka Math. J.* 12(1960)363—376.

[3] Remarks on the equations of evolution in a Banach space *Osaka Math. J.* 12(1960)145—165.

[4] Convergence to a stationary state of the solution of some kind of differential equations in a Banach space, *Proc. Japan Acad.* 37(1961)127—130

5 Note on singular perturbation for abstract diffe-

rentia l equations, *Osaka J. Math.* 1(1964)239-252.

[6] *Equations of evolution* (English translation), Pitman, London(1979).

H. Tanabe and M. Watanabe

[1] Note on perturbation and degeneration of abstrat differential equations in Banach space, *Funkcialaj Ekvacioj* 9(1966)163—170.

C. Travis and G. Webb

[1] Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations, *Acta Math. Acad. Sc. Hung.* 32(1978)75—96.

[2] Second order differential equations in Banach spaces, Nonlinear equations in abstract spaces, Éd. V. Lakshmikantham, Academic Press, New York(1978)331—361.

H. F. Trotter

[1] Approximation of semi-groups of operators, *Pacific J. Math.* 8(1958)887—919.

[2] On the product of semi-groups of operators, *Proc Amer. Math. Soc.* 10(1959)545—551.

T. Ushijima

[1] Some properties of regular distribution semi-groups, *Proc. Japan Acad.* 45(1969)224—227.

[2] On the generation and smoothness of semigroups of linear operators, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo* 19(1972)65—127.

W. von-Wahl

[1] Instationary Navier-Stokes equations and parabolic sysems, *Pacific J. Math.* 72(1977)557-569.

[2] Semilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order, *Proc. Royal Soc. Edinburgh A* 78(1978)193—207.

J.A.Walker

[1] *Dynamical systems and evolution equations*, Plenum Press, New York(1980).

J.Watanabe

[1] On some properties of fractional powers of linear operators, *Proc. Japan Acad.* 37 (1961)273—275.

M.Watanabe

[1] On the differentiability of semi-groups of linear operators in locally convex spaces, *Sc. Rep. Niigata Univ.* 9(1972)23—34.

G.Webb

[1] Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces, *J. Func. Anal.* 10(1972)191—203.

R.Wüst

[1] Generalization of Rellich's theorem of perturbations of (essentially) self adjoint operators, *Math Z.*119(1971)276—280.

J.Yorke

[1] A continuous differential equations in Hilbert

space without existence, *Funkcialaj Ekvacioj* 12 (1970)19—21.

K.Yosida

[1] On the group embedded in the metrical complete ring, *Japan J. Math.* 13 (1936)61—80.

[2] On the differentiability and representation of one parameter semi-groups of linear operators, *J. Math. Soc. Japan* 1(1948)15—21.

[3] Lectures on semi-group theory and its applications to Cauchy's problem in partial differential equations, *Tata Inst. Fund. Research*(1957).

[4] On the differentiability of semi-groups of linear operators, *Proc. Japan Acad.* 34(1958)337—340.

[5] Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them, *Proc. Japan Acad.* 36(1960)86—89.

[6] Time dependent evolution equations in locally convex space, *Math. Ann.* 162(1965)83—86.

[7] *Functionbl analysis*(6th edition) Springer Verlag (1980).

J.Zabczyk

[1] A note on C_0 semigroups, *Bull. Acad. Polon. Sc.* (Math. Astr. Phys.)23(1975)895—898.

S.D.Zaidman

[1] *Abstract differentiat equations*, Pitman Research Notes in Math. 36(1979).

索　引

一 画

三 画

四 画

五 画

六 画

七 画

八　画

九　画

十　画

十一　画

十二 画

十三 画

十四 画